به نام پروردگار مهربان

ریاضیات تجربی جامع کنکور

هفت کتاب در یک کتاب

ویرایش جدید + کنکور ۹۵

ریاضی۱	ریاضی۲	ریاضی۳	هندسه۱
آمار و مدلسازی		ریاضی عمومی ۱ و ۲	

مهندس منصور سعیدی
مهندس محمدرضا میرجلیلی

مهروماه

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست
هرکسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته به جاست
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

«قسم به قلم و آنچه می‌نویسد.»

سپاس خداوند بی‌همتا را که بار دیگر لطف خود را بدرقه‌ی راهمان نمود
تا بتوانیم مجموعه‌ی دیگری را با همت ناچیز خود به ثمر برسانیم.

درس اثر گذار! ...

معمولاً اگر از هر دانش‌پژوه رشته تجربی، سؤال شود مهمترین دروس برای کنکور کدام است، احتمالاً درس‌های زیست‌شناسی و شیمی را نام می‌برد. شاید به این نکته توجه ندارد که دیگران هم مانند او فکر می‌کنند و بیشتر به همین دروس می‌پردازند. امّا در نهایت درسی درکنکور تعیین‌کننده خواهد بود که عده‌ی کم‌تری آن را می‌خوانند و عده‌ی بیشتری از آن صرف‌نظر می‌کنند. ریاضیات تجربی یکی از درس‌های اثرگذار در آزمون کنکور رشته‌ی تجربی می‌باشد و دلیل واضح آن، این است که بیش از ۹۰ درصد دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی از این درس صرف‌نظر می‌کنند و یا در آن موفق نیستند. چنان‌که اگر به آمار سال‌های اخیر کنکور سراسری توجه کنیم، مشاهده خواهیم کرد که بیش از ۹۰ درصد دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی توانسته‌اند حداکثر به ۷ سؤال از ۳۰ سؤال ریاضی پاسخ صحیح بدهند و این در حالی است که دانش آموزانی که در این درس به ۴۰ درصد سؤالات پاسخ صحیح داده‌اند، دارای تراز و رتبه‌های بسیار خوبی بوده‌اند.

رعب و وحشت!

دوست گرامی! دانش‌آموز عزیز! شاید وقتی که کتاب ریاضیات تجربی مهروماه رو که این قدر تعریفشو شنیده بودی تهیه کردی و حجم اونو دیدی به خودت گفتی که من چه جوری باید این کتاب رو بخونم؟! ولی اصلاً نگران نباش، آخه این کتاب از ۷ کتاب درسی ریاضیات دبیرستان تشکیل شده که شامل درسنامه‌های جامع، کلی تست و آزمون‌های استانداره. دقت کن که اگه بخوای معادل این کتاب رو از ناشران دیگه تهیه کنی اولاً حداقل باید ۳ برابر قیمت این کتاب رو هزینه کنی، ثانیاً اون وقت می‌بینی که تعداد صفحات کتاب‌هایی که تهیه کرده‌ای ۲ برابر تعداد صفحات کتاب مهروماهه، ثالثاً بازهم این همه تنوع در تعداد تست‌ها رو نخواهی دید.
پس نگران نباش و مطمئن باش که یک مرجع کامل از درس ریاضیات تجربی رو تهیه کردی که با مطالعه‌ی اون هیچ مشکلی در درس ریاضی حتی در کنکور نخواهی داشت.

یک کتاب عالی! ...

عدم وجود یک مرجع کامل (شامل تشریح کامل درس به همراه نکات مهم و پرسش‌های چهار گزینه‌ای تألیفی و کنکوری) در درس ریاضی رشته‌ی تجربی و پراکندگی و نقایص کتاب‌های موجود، ما را بر آن داشت تا به خواسته دانش‌آموزان این رشته پاسخ دهیم و به نگارش کتابی که در دست دارید بپردازیم. با مطالعه‌ی این کتاب که ویژه‌ی رشته‌ی تجربی تهیه شده است دانش آموزان این رشته به کتاب‌های کمک‌درسی متعدد و پراکنده، نیازی نخواهند داشت. کتاب حاضر براساس سرفصل‌های ریاضیات کنکور تجربی در **۲۴ فصل** تألیف شده است و کلیه مطالب دروس **ریاضی ۱، ریاضی ۲، ریاضی ۳، ریاضی عمومی ۱ و ۲، آمار و مدل‌سازی** و **هندسه ۱** را تحت پوشش خود قرار می‌دهد. به لحاظ جامعیت مباحث و دربرداشتن آموزش کامل به‌همراه بیش از **۴۸۰۰ تست** در این حجم به جرأت می‌توان گفت که این مجموعه کاملترین و غنی‌ترین کتاب ریاضیات تجربی موجود است. استقبال کم‌نظیر دانش‌آموزان و دبیران و رسیدن این کتاب در این مدت کوتاه به این تعداد چاپ این ادعا را تصدیق می‌کند. در این مدت ما با استقبال سایر ناشران کمک‌آموزشی نیز مواجه بودیم! به‌نحوی که پس از انتشار این کتاب **بسیاری از همکاران به الگوبرداری، هرچند ناقص، از این مجموعه پرداختند،** اگرچه باید این تکاپو و رقابت را به فال نیک گرفت!

راهنمای بخش‌ها و نمادهای کتاب

هر فصل کتاب شامل چهار بخش کلی به این شرح است. بخش اول: درس‌نامه جامع، بخش دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای تفکیکی، بخش سوم: آزمون جامع فصل و بخش چهارم: پاسخنامه تشریحی.

۱. درس‌نامه: درس‌نامه در هر فصل موارد زیر را در بر می‌گیرد:

نمای کلی فصل: در ابتدای هرفصل، مقدمه ای شامل جایگاه و اهمیت فصل و میزان سؤالات مطرح از آن در کنکور سراسری به همراه نمودار نمای کلی فصل درج شده است. این نمودار که بر مبنای ترتیب و تقسیمات درس‌نامه تنظیم شده به شما کمک می‌کند تا ساختار فصل و «نقشه هوایی» درس را مرور کنید. هم‌چنین در این قسمت پیش‌نیازهای لازم برای مطالعه‌ی هر فصل نیز آورده شده است تا شما با آگاهی بیشتری مطالعه‌ی هر فصل را انجام دهید.

آموزش: در این بخش مطالب درسی، نکات آموزشی و نکات مورد نیاز برای حل تست‌ها در ایستگاه‌های مختلف آورده شده است. بهتر است پس از خواندن کامل مطالب آموزشی هر ایستگاه، به سراغ پاسخ تست‌های آن ایستگاه بروید. از آنجا که در این بخش روال آموزشی دنبال شده است، بنابراین برای فهم بهتر و حفظ پیوستگی موضوعات بهتر است که مطالب درس‌نامه به ترتیبی که آمده است، مطالعه شود.
در این قسمت روابط و فرمول‌های کاربردی و مهم داخل باکس مشخص شده‌اند. همچنین نکته، تذکر، توجه، یادآوری، توضیح، نتیجه و بیشتر بدانید مواردی هستند که در بخش آموزش با علامت‌های زیر آمده‌اند.

نکته **تذکر** **توجه** **یادآوری** **توضیح** **نتیجه** **بیشتر بدانید**

دقت کنید که احتمال طرح تست از مباحث «بیشتر بدانید» در کنکور چندان بالا نیست (شاید حدود ۵٪) بنابراین اگر فرصت کافی یا برنامه‌ای برای درصد خیلی بالا در کنکور ندارید، احتیاجی به مطالعه‌ی این قسمت‌ها نیست.

مثال آموزشی: بسیاری از مباحث ریاضیات با حل مثال، بهتر فهمیده می‌شود. در بخش درس‌نامه هرجا که نیاز بوده مثال‌های آموزشی با حل مرحله‌ای و کامل آمده است.

تست نمونه: در این قسمت تست‌های مختلف برای تکرار و تمرین مطالب آموزشی به منظور تسلط بیشتر، آورده شده است. حل و فهم تمام تست‌های نمونه ضروری است، زیرا با حل این تست‌ها، نکات آموزشی مطرح شده را بهتر فرا خواهید گرفت و تسلط بیشتر بر مفاهیم ارائه شده پیدا خواهید کرد. توصیه می‌شود ابتدا سعی کنید که تست نمونه را خودتان حل کنید و سپس پاسخ کتاب را با آن مقایسه کنید. سعی کنید همه‌ی مثال‌های آموزشی و تست‌های داخل درسنامه‌های کتاب را نیز حل کنید، چرا که در کنکورهای اخیر، چندین تست مشابه تست‌ها و مثال‌های آموزشی درس‌نامه‌ها آورده شده است.

۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای: در انتهای هر فصل براساس طبقه‌بندی موضوعی فصل، تست‌ها به‌صورت ایستگاه‌های مختلف ارائه شده است.
این ایستگاه‌بندی با سرفصل‌های درس‌نامه کتاب هماهنگ است. تعداد تست‌های هر مبحث بستگی به حجم فصل و اهمیت آن مبحث دارد. سعی شده است که این تست‌ها استاندارد و از نظر کیفیت و سطح، مشابه سؤالات کنکور باشند. سعی کنید تست‌های کنکوری را در زمانی کم‌تر از زمان کنکور حل کنید (برای هر تست به‌طور متوسط ۱ دقیقه و ۴۰ ثانیه در کنکور زمان دارید). اگر در برخی از مبحث‌های موضوعی نتیجه خوبی نگرفتید، توصیه می کنیم یک بار دیگر درس‌نامه‌ی مربوط به آن مبحث را مطالعه کنید.

۳. آزمون‌های جامع: پس از تست‌های تفکیکی در انتهای هرفصل، چند آزمون جامع ۱۰سؤالی از مجموعه مباحث آن فصل فراهم شده است که پاسخ به آن می تواند تسلط شما را بر مجموعه‌ی مطالب، سنجش نماید. پاسخنامه‌ی کلیدی این آزمون‌ها در انتهای پاسخنامه‌ی تشریحی فصل آمده است. به منظور امکان ارزیابی بهتر مخاطب، یک فصل مستقل در انتهای کتاب به آزمون‌های جامع اختصاص یافته است که شامل ۵ آزمون استاندارد مشابه کنکور می باشد. سعی کنید آزمون‌های جامع را در زمان تعیین شده پاسخ دهید. برای دسترسی به پاسخنامه‌ی تشریحی آزمون‌های جامع می‌توانید به صفحه‌ی مربوط به این کتاب در سایت مهروماه مراجعه کنید.

۴. پاسخنامه‌ی تشریحی: تست‌های تفکیکی کتاب به‌صورت کاملاً تشریحی پاسخ داده شده است. در کنار هر پاسخ، سطح تست به لحاظ میزان دشواری مشخص شده است. تست ها در ۳ سطح آسان، متوسط و سخت سطح‌بندی شده‌اند، که با نمادهای مقابل نمایش داده شده است:

یک نکته در مطالعه و آموختن ریاضیات

یکی از مشکلات اساسی دانش‌آموزان عزیز؛ نحوه‌ی مطالعه‌ی درس ریاضی است که به دلیل شیوه‌ی غلط در مطالعه‌ای این درس، پس از گذشت زمان دچار سرخوردگی می‌شوند و از درس ریاضی بدشان می‌آید. دلیل دیگر برای ضعف در درس ریاضی آن است که دانش‌آموزان نسل امروز خیلی کم‌حوصله هستند و پشتکار بچه‌های قدیم را ندارند (!) آموختن و فهم موضوعات نیاز به زمان ، تمرین و پشتکار دارد. بگذارید با یک مثال منظورم را روشن‌تر بیان کنم:

یک روز داشتم دفتر مشق سال اول دبستانم را ورق می‌زدم، وقتی دقت کردم دیدم عجب، طی یک سال تحصیلی (حدوداً ۹ ماه) من فقط ۳۲ تا حرف یاد گرفتم و نوشتن حدوداً ۱۰۰ تا کلمه. یک چیز جالب‌تر این که هر هفته فقط یک حرف از حروف الفبای فارسی را آموخته‌ام. «یک هفته برای آموزش یک حرف.»

حالا که به سر مشق‌های معلمم نگاه می‌کنم، می‌بینم دفعه‌ی اول یک خط بوده و دفعه‌ی دوم سه خط تا اینکه روز آخر شده ۳ صفحه. (راستی اول چقدر حروف رو بدخط می‌نوشتم!) عجب حوصله‌ای داشتیم ما. قطعاً برای شما هم همین‌طور بوده، پس یادمون نره که با صبر و حوصله و تمرین زیاد می‌شه بر هر موضوعی مسلط شد. دوست عزیز! نمی‌توان یک شبه یا یک ماهه ریاضی‌دان شد، بلکه باید حداقل یکسال مستمر وقت و انرژی گذاشت.

حالا که اهمیت حوصله و پشتکار در آموختن ریاضی را دونستی، می‌تونم بگم چطوری باید ریاضی رو بخونی؛
راستی! اول یک سؤال بی‌ربط!: به نظر شما بزرگترین جنایت کار تاریخ در درس ریاضی کیه؟! ... جوابش بمونه برای بعد ...

روش مطالعه‌ی درس ریاضی

۱. آموختن: خواندن تمام مطالب مربوط به هر موضوع و تسلط کامل بر مفاهیم. *(اگر چند مرتبه هم خواندید اشکالی نداره!)* اگر در این مرحله مشکلی داشتید آن را با پرسیدن از دوستان یا دبیر محترمتان برطرف کنید.

۲. حل تمرین و تمرین و تمرین: در ابتدا با حل مثال‌های ساده یا سؤالاتی که پاسخ تشریحی آن‌ها را داریم. (در این کتاب اول مثال‌های آموزشی و سپس تست‌های نمونه). همچنین اگر دانش‌آموز هستید و به مدرسه می‌روید، حل مثال‌هایی که دبیرتان قبلاً آن‌ها را حل کرده‌اند. در این مرحله اصلاً اشکالی ندارد که جزوه و فرمول‌ها کنار شما باشند ولی سعی کنید به حل سؤال نگاه نکنید، اگر همین که نتوانستید تستی را حل کنید بخواهید بلافاصله به سراغ پاسخ کتاب بروید، و برای حل آن مسأله تلاش نکنید به‌طور قطع و یقین(!) شما یکی از بزرگ‌ترین جنایت‌کاران در درس ریاضی هستید!!! *(اینم هم جواب این سؤال اول!)*، زیرا با این کار، می‌خواهید ریاضی را مانند دروس عمومی حفظ کنید! گاهی اوقات لازم است روی یک مسأله حتی نیم‌ساعت هم فکر کنید ولی به پاسخ آن نگاه نکنید! سعی کنید هر چه در ذهنتان هست را روی کاغذ بیاورید و خودتان مسأله را حل کنید و مطمئن باشید که اگر مسأله‌ای را خودتان حل کرده باشید، هر مدل و تیپی از آن مبحث را قادر خواهید بود حل نمایید. *شاید داری به خودت می گی نیم‌ساعت برای یک سؤال.... خیلی بی‌معرفتی!... من میگم یادت باشه که برای نوشتن یک حرف در کلاس اول یک هفته وقت میذاشتی. بنابراین حالا هم برای یادگرفتن ریاضی، حوصلتو بالا ببر!*

۳. اطمینان از تسلط بر موضوع: سعی کنید در هر فصل، سؤالاتی را که با هاشون مشکل داشته‌اید را مشخص کرده و بعد از گذشت چندین هفته دوباره این سؤالات را حل کنید. شما می‌توانید وقتی آزمونی دارید و وقت لازم برای مطالعه‌ی کامل فصل ندارید، فقط این سؤالات مشخص شده را حل نمایید و یا هر وقت که خواستید فصلی از کتاب را دوره کنید فقط این سؤالات را دوباره حل کنید.

۴. سؤالات هدف: سعی کنید در هر فصل حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۰ سؤال را به گونه‌ای انتخاب کنید که همه‌ی مطالب آن فصل در این سؤالات گنجانده شده باشد. سؤالات هدف لزوماً سؤالات خیلی سخت و نکته‌دار نیستند، بلکه باید به گونه‌ای انتخاب شوند که وقتی این سؤالات را حل کردید خیالتان راحت باشدکه کل فصل را دوره کرده‌اید. سؤالات هدف، برای هفته‌های نزدیک به آزمون کنکور بسیار مناسب هستند زیرا شما در یک ماه مانده به کنکور سراسری قطعاً نمی‌توانید همه‌ی مطالب فصل را دوباره مطالعه کنید ولی با حل سؤالات هدف به نوعی این کار را انجام داده‌اید.

نحوه‌ی استفاده از این کتاب

۰ به فهرست کتاب توجه کنید. فصل‌هایی که یک رنگ دارند با هم مرتبط هستند و خوب است که اگر خودتان این کتاب را می‌خوانید، به این روند توجه کنید. البته اگر همراه کلاس و تدریس استاد این کتاب را می‌خوانید، از همان نظم پیروی کنید.

۱ ابتدا نگاهی به نمای کلی فصل (فهرست ایستگاه‌های درس و تست) بیاندازید تا مسیر کلی مباحث و موضوعات مهم در ذهن شما سازماندهی شود. به منابع و پیش‌نیازهای هر فصل هم که در این صفحه آمده توجه داشته باشید.

۲ درس‌نامه را با حوصله مطالعه کنید اگر احساس می‌کنید فهم مطالب برای شما دشوار است لازم است به کتاب‌های درسی مراجعه کنید تا درک پایه خود از آن مبحث را تقویت کنید.

۳ روابط و فرمول ها را تجزیه و تحلیل کنید. دقت کنید که لازم نیست همه‌ی فرمول‌ها را حفظ کنید بلکه بهتر است اولاً در صورت امکان، مفهوم رابطه و فرمول و یا اثبات قضایا را متوجه شوید و سپس با تمرین کافی به کاربرد آن مسلط شوید. روابط و فرمول‌های مهم در این کتاب داخل کادر خاکستری آمده است. خوب است چندین‌بار فرمول‌ها، روابط و نکات مهم هر قسمت را برای خود بنویسید و مرور کنید.

۴ برای تسلط کامل بر نکات و فرمول‌ها؛ مثال‌های آموزشی را بررسی نموده و تست‌های نمونه را بدون نگاه کردن به پاسخ تشریحی آن‌ها، حل کنید.

۵ در صورتی که از حل مسأله بازماندید، جواب تشریحی آن را مطالعه کرده و دوباره مسأله را خودتان حل کنید.

۶ در صورتی که پاسخ برخی مسائل، برای شما مبهم بود حتماً به کمک دوستان و دبیران خود سعی کنید راه حل مسأله را بیاموزید.

۷ برای تمرین مفاهیم و نکات به سر فصل‌های موضوعی تست‌ها مراجعه کنید. در این مرحله دانش‌آموزان را به ۴ گروه دسته‌بندی می‌کنیم.

الف) برای دستیابی به درصد ۳۰ تا ۴۰: این گروه، از آن دسته دانش‌آموزانی هستند که در سال‌های گذشته اهمیت چندانی به درس ریاضی نداده‌اند و یا علاقه‌ی زیادی برای یادگیری این درس از خود نشان نداده‌اند. این گروه می‌بایست بعد از انجام مراحل ۱ تا ۶، تست‌های کنکور سراسری تجربی را مورد بررسی قرار دهند. این دسته از دانش‌آموزان نیازی به حل تست‌های کنکور سراسری و تست‌های تألیفی و «برای ۱۰۰ درصد» ندارند. در ضمن این گروه نباید قسمت‌های «بیشتر بدانید» در درس‌نامه را مطالعه کنند.

ب) برای دستیابی به درصد ۴۰ تا ۵۰: این گروه باید بعد از انجام مراحل ۱ تا ۶ به ترتیب به حل تست‌های کنکور سراسری تجربی و سپس تست‌های سراسری رشته‌ی ریاضی پرداخته و برای جمع‌بندی مطالب هر فصل، همه‌ی آزمون‌های جامع انتهای هر فصل را حل نمایند. مطمئن باشند با انجام کارهای گفته شده، درصد قابل قبولی در کنکور به دست خواهند آورد. این دسته از دانش‌آموزان اصلاً نیازی به خواندن بخش‌های «بیشتر بدانید» در درس‌نامه و حل تست‌های تألیفی و «برای ۱۰۰ درصد» ندارند.

ج) برای دستیابی به درصد ۵۰ تا ۸۰: این گروه از دانش پژوهان باید بعد از مطالعه‌ی درسنامه (و ترجیحاً مطالعه‌ی بخش‌های «بیشتر بدانید») و حل تست‌های نمونه‌ی داخل درس‌نامه به حل تست‌های ایستگاه‌های مختلف به ترتیبی که طبقه‌بندی شده‌اند بپردازند و بعد از اتمام این مراحل باید به حل تمامی آزمون‌های جامع هر فصل اقدام نمایند تا مطالب خوانده شده برای آن‌ها

جمع‌بندی شود. این دسته از دانش‌آموزان نیازی به حل تست‌های قسمت «برای ۱۰۰ درصد» ندارند و مطمئن باشند که با انجام مراحل گفته شده حتماً در کنکور سراسری می‌توانند تا ۸۰ درصد سوالات را جوابگو باشند.

د) برای دستیابی به درصد بالای ۸۰: این گروه دانش‌آموزانی محسوب می‌شوند که می‌خواهند بالاتر از ۸۰ درصد سؤالات کنکور را پاسخگو باشند. این گروه باید تمامی مراحل گفته شده در قسمت‌های قبل (شامل مطالعه‌ی بخش‌های «بیشتر بدانید») را انجام داده و هم‌چنین حتماً تست‌های «برای ۱۰۰ درصد» را نیز حل نمایند تا مطمئن باشند که با هر سوالی در درس ریاضی مواجه شوند، بدون هیچ‌گونه مشکلی قادر به پاسخ‌گویی آن سوال خواهند بود.

۸ در پایان مطالعه‌ی کتاب، برای جمع بندی و سنجش خود می‌توانید آزمون‌های جامع انتهای کتاب را پاسخ دهید.

۹ در فصل مرور و جمع‌بندی (۱ تا ۲ ماه مانده به کنکور) می‌توانید برای جمع‌بندی سریع مطالب از **کتاب آخر ریاضیات تجربی** که توسط همین انتشارات در قطع کوچک به‌صورت فشرده و مختصر تمام فرمول‌ها و روابط را دوره نموده و تیپ‌های تست‌های مطرح در کنکور را دسته‌بندی کرده است، استفاده نمایید.

سپاس‌نامه

در پایان از مدیریت محترم انتشارات مهروماه، جناب آقای احمد اختیاری که همواره در راه ارتقای این اثر با صبر و حوصله‌ای مثال زدنی ما را یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را داریم و از خداوند متعال بهترین‌ها را برای ایشان آرزومندیم و ممنونیم از:

- آقای سامان شاهین‌پور و خانم‌ها لاله پارسی و سمیه جباری که زحمت اصلی حروف‌چینی و صفحه‌آرایی کتاب را بر عهده داشته‌اند.
- آقای علیرضا پورخمسه به‌خاطر طراحی ویژه جلد کتاب.
- خانم منصوره محمدی به خاطر رسم مجدد شکل‌های کتاب و هم‌چنین طراحی شکل‌های جدید
- آقایان شارخ پاشایی، علیرضا پورخمسه و روزبه اسحاقیان و خانم‌ها سوگند روشنی، فریده محمدی، الهه اسماعیلی، منصوره شاعری، زهرا امینیان و الهام اسماعیلی‌یار که در چاپ‌های قبلی زحمت زیادی را برای این کتاب کشیدند (با آرزوی بهترین‌ها برای همه‌ی این عزیزان).
- دبیران و همکاران محترم جناب آقای میثم حمزه‌لویی، جناب آقای هامرز حسینی، جناب آقای سیداحسان سجادیان، جناب آقای رضا سارنگ، جناب آقای خسرو کاکسوندی، جناب آقای محسن خلیلی، جناب آقای افشین بهرنگی و جناب آقای پیمان فضلی که در ویرایش‌های اخیر کتاب توصیه‌ها و نکات ارزشمندی را ارائه و همواره ما را مورد لطف خود قرار داده‌اند.
- تشکر بسیار ویژه از سرکار خانم مینا نظری به‌خاطر بازخوانی کتاب و مطابقت دست نوشته‌ها با متن تایپی و ویرایش همه جوره‌ی متن که به بهترین شکل ممکن انجام شده است. (واقعاً خسته نباشند!)
- دانش‌آموزان خوب دبیرستان‌های خرد، ابوریحان، فاطمه الزهرا (س) و فدک منطقه‌ی ۱۸، سیمای نور، سروش، علامه طباطبایی، حضرت زینب(س)، نمونه دولتی سلمان منطقه‌ی ۱۲ و دبیرستان دخترانه فرزانگان۵ که مایه‌ی دلگرمی ما برای ارتقای سطح این کتاب چه از لحاظ کیفی و چه از لحاظ کمی بودند.
- همه‌ی دانش‌آموزان عزیزی که در سراسر کشور با ارسال پیامک به هرچه بهتر بودن این کتاب، کمک کردند به‌خصوص خانم‌ها یاسمن سعیدی، سپیده کوهستانی و آیدا فروغی و آقایان شهریار رحیمی، سعید بیاتی.
- سرکار خانم فرزانه قنبری به‌خاطر هماهنگی و پیگیری‌های فوق‌العاده‌ی ایشان در بهبود کیفیت کتاب.
- آقای عباس گودرزی، مدیر فروش انتشارات به خاطر حمایت‌های همه جانبه‌ی ایشان.
- سایر پرسنل محترم و زحمت‌کش انتشارات مهروماه به‌خاطر همه‌ی لطفی که داشته و دارند.
- تشکر بسیار ویژه از آقایان سامان شاهین‌پور و محسن فرهادی و خانم‌ها مینا نظری و سمیه جباری داشته باشیم که در چاپ شصت و یکم کتاب، سنگ‌تمام گذاشتند.

مطالب این کتاب با هدف بسط و تشریح مباحث موجود در کتاب درسی تهیه و تدوین گردیده است. کوشش ما بر این بوده است که خواننده با مطالعه‌ی مثال‌های متنوع و شرح مطالب درسی و مورد نیاز، بتواند پرسش‌های علمی خود را تا حد ممکن مرتفع نماید.

از کلیه صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌نماییم این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم ننمایند. خواهشمند است نظرات ارزشمند خود را به نشانی الکترونیکی mansaiedi@yahoo.com و mr_mirjalili@yahoo.com ارسال یا از طریق پیامک **SMS** به سامانه‌ی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ اعلام فرمایید.

تغییرات کتاب در چاپ جدید

- **تطبیق دقیق و مجدد مطالب کتاب با کتاب‌های درسی**
- **ویرایش کامل درس‌نامه و تست‌های مربوط به آن، همراه با پاسخ‌های تشریحی**
- **طبقه‌بندی درس‌نامه در ایستگاه‌های مختلف و حفظ نظم آموزشی**
- **اضافه شدن تست‌های کنکور سراسری تجربی و ریاضی سال‌های ۸۰ الی ۸۵ به درس‌نامه‌های کتاب**
- **اضافه شدن تست‌های کنکورهای خارج از کشور رشته‌ی ریاضی از سال ۸۴ تا ۹۴ و کنکورهای خارج از کشور رشته‌ی تجربی سال‌های ۸۴ و ۸۵ به درس‌نامه‌های کتاب**
- **اضافه شدن تست‌های کنکورهای خارج از کشور رشته‌ی تجربی از سال ۸۶ الی ۹۴ به بانک سؤالات**
- **تکمیل و توسعه‌ی پاسخ‌های تشریحی تمامی سوالات و افزودن نکات و یادآوری‌های جدید و حل سؤالات با چندین روش مختلف**
- **افزایش تست‌های کتاب به بیش از ۴۸۰۰ تست**
- **اضافه شدن تست‌های کنکور سراسری سال ۹۵ داخل و خارج از کشور**
- **چیدمان جدید آزمون‌های جامع هر فصل در چند آزمون استاندارد ۱۰سؤالی و قرار دادن پاسخ تشریحی آزمون‌ها بر روی سایت مهروماه**
- **توجه بیشتر به رویکرد ویژه‌ی رشته‌ی تجربی در همه‌ی بخش‌های کتاب**
- **طراحی یک فصل جدید تحت عنوان رسم نمودارها و کاربردهای آن و اضافه شدن به فصل‌های کتاب مطابق با تغییرات در سؤالات کنکورهای سال‌های اخیر**
- **به روزرسانی صفحات جداکننده‌ی هر فصل که در ابتدای هر فصل آمده است.**
- **طراحی جدید برای صفحه‌ی فهرست کتاب جهت سیر آموزشی منظم، برای آن دسته از دانش‌آموزانی که به‌صورت انفرادی به مطالعه‌ی این کتاب می‌پردازند.**

فصل صفر

۰

مقدمه‌ای بر ریاضیات پایه

یکی از مشکلات اساسی دانش‌آموزان رشته‌ی تجربی و شاید سایر رشته‌ها، ضعف در محاسبات پایه است. در این فصل سعی شده است نگاهی اجمالی برموضوعات مهم ریاضیات پایه داشته باشیم. گرچه از این فصل به‌طور مستقیم سؤالی در کنکور سراسری مطرح نمی‌شود، ولی به جرأت می‌توان گفت که اگر نکات و مهارت‌های موجود در این فصل به خوبی فرا گرفته نشود، شاید در حل اکثر تست‌ها و تمرین‌های ریاضی دچار مشکل شوید و این موضوع باعث بی‌علاقگی شما به درس ریاضی خواهد شد.

راهنمای ایستگاه‌ها

منابع فصل:

کتاب درسی ریاضیات ۱

ایستگاه ۰ محاسبات عددی

۱ الویت‌بندی انجام چهار عمل اصلی:

در محاسبات ریاضی توان بر ضرب و تقسیم، ضرب و تقسیم بر جمع و منها تقدم دارد. بنابراین در محاسبات به روش زیر عمل کنید:

گام اول: اعداد توان‌دار را ساده کنید تا جایی که عدد توان‌دار دیگری وجود نداشته باشد.

گام دوم: اعمال $\times$ و $\div$ رو از سمت چپ به راست انجام می‌دهیم تا جایی‌که ضرب و تقسیم دیگری وجود نداشته باشد.

گام سوم: اعمال $+$ و $-$ رو از سمت چپ به راست انجام می‌دهیم تا جایی‌که جمع و تفریق دیگری وجود نداشته باشد.

توجه: اگر در عبارت پرانتز داشتید، اول از همه عبارت داخل پرانتز را با همین اولویت‌بندی ساده کنید تا جایی‌که پرانتز دیگری وجود نداشته باشد.

مثال آموزشی

• **عبارات زیر را محاسبه کنید.**

الف) $۳^۲-۲^۳\times۵+۷-۱۸+۲\times(-۳)$ **ب)** $-۵+۶\times(۲-۳\times۵+۱-۶\div۲)-(۳\times(-۲)+۱-۲\times۳)$

حل: الف) پرانتز نداریم، پس طبق اولویت‌بندی، محاسبات را شروع می‌کنیم.

گام اول

دیگه عدد توان‌داری وجود نداره، می‌ریم سراغ گام دوم

$$۳^۲-۲^۳\times۵+۷-۱۸+۲\times(-۳)$$
$$=۹-۸\times۵+۷-۱۸+۲\times(-۳)$$

گام دوم

$$=۹-۴۰+۷-۱۸+(-۶)$$
$$=-۳۱+(-۱۱)-۶$$

دیگه ضرب و تقسیمی وجود نداره، می‌ریم سراغ گام سوم

گام سوم

$$=-۳۱-۱۱-۶$$
$$=-۴۲-۶=-۴۸$$

ب) دو تا عبارت داخل پرانتز داریم که اول می‌ریم سراغ اونا، تا کاملاً ساده نشدن به بقیه‌ی محاسبات کاری نداریم.

$$-۵+۶\times(۲-۳\times۵+۱-۶\div۲)-(۳\times(-۲)+۱-۲\times۳)$$

گام ۲ گام ۲

$$=-۵+۶\times(۲-۱۵+۱-۳)-(-۶+۱-۶)$$

گام ۳ گام ۳

$$=-۵+۶\times(-۱۳-۲)-(-۵-۶)$$

گام ۳ گام ۳

$$=-۵+۶\times(-۱۵)-(-۱۱)$$

دیگه پرانتز نداریم، پس طبق اولویت‌بندی محاسبات رو انجام می‌دیم:

$$=-۵+۶\times(-۱۵)-(-۱۱)=-۵-۹۰+۱۱=-۹۵+۱۱=-۸۴$$

۲ نمادهای ریاضی:

نمادها در ریاضی به صورت زیر می‌باشند:

قرارداد ۱ هر مجموعه را با یک حرف بزرگ انگلیسی نشان می‌دهیم. البته می‌دانیم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و مجموعه‌ی اعداد حسابی را با $\mathbb{W}$ و مجموعه‌ی اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهند.

قرارداد ۲ عضو دلخواه از یک مجموعه را با یک حرف کوچک انگلیسی نشان می‌دهیم. مثلاً جمله‌ی «x عضو اعداد طبیعی» یعنی جای x یک عدد طبیعی می‌تواند بنشیند، پس x یک عدد طبیعی دلخواه است.

قرارداد ۳ برای بیان عضویت یک عدد به یک مجموعه از نماد «$\in$» استفاده می‌کنیم. (مثلاً برای اینکه بگیم ۱ عضو $\mathbb{N}$ هستش می‌نویسیم $۱\in\mathbb{N}$) و برای بیان عدم عضویت یک عدد به یک مجموعه از نماد «$\notin$» استفاده می‌کنیم. (مثلاً به جای اینکه بگیم صفر عضو $\mathbb{N}$ نیست، می‌نویسیم $۰\notin\mathbb{N}$).

قرارداد ۴ اگر بخواهیم یک عبارت را برای هر عضو از یک مجموعه بیان کنیم، به جای استفاده از واژه‌ی "هر" از نماد "$\forall$" استفاده می‌کنیم. به «$\forall$» سور عمومی می‌گویند. عبارتی که به وسیله‌ی سور عمومی بیان می‌شود، زمانی برقرار است که، آن عبارت برای همه‌ی اعضای مجموعه درست باشد. اثبات عباراتی که دارای سور عمومی هستند، به نظر سخت می‌رسد. (ولی برعکسش راحته)، یعنی برای رد درستی عبارتی که دارای سور عمومی هستند، کافی است، عضوی از مجموعه را چنان بیابیم که عبارت برای آن برقرار نباشد. این عضو به تنهایی درستی عبارت را رد می‌کند. این روش حل در ریاضی به روش«مثال نقض» معروفه.

قرارداد ۵ در احکامی که برای یک مجموعه بیان می‌کنیم، به جای به‌کار بردن جمله‌ی "وجود دارد" از نماد«$\exists$» استفاده می‌کنیم. به نماد «$\exists$» سور وجودی می‌گویند. برای نشان دادن درستی عبارتی که شامل سور وجودی می‌باشد، کافیست عضوی از مجموعه را چنان بیابیم که حکم برای آن برقرار باشد. از نماد «$\nexists$» برای بیان جمله‌ی «وجود ندارد» استفاده می‌کنیم.

قرارداد ۶ عبارت $x \times y$ را برای راحتی به‌صورت xy می‌نویسیم.

قرارداد ۷ برای اینکه نشان دهیم عدد x از عدد y بزرگ‌تر است. از نماد $(x > y)$ استفاده می‌کنیم و برای اینکه نشان دهیم x بزرگ‌تر یا مساوی y می‌باشد از نماد $(x \geq y)$ استفاده می‌کنیم.

قرارداد ۸ حاصل‌ضرب a در خودش را با a^2 نشان می‌دهیم و a^2 را مربع یا مجذور عدد a می‌گوییم.

مثال آموزشی

● **مفاهیم زیر را به زبان ریاضی بنویسید.**

الف) مفهوم بسته بودن عمل جمع (+) روی $\mathbb{N}$. **ب) جابه‌جایی عمل جمع (+) روی $\mathbb{Z}$.**

ج) شرکت‌پذیری عمل ضرب روی $\mathbb{Z}$. **د) پخش‌پذیری عمل ضرب روی عمل جمع برای $\mathbb{Z}$.**

حل: اول مفاهیم را به فارسی می‌نویسیم، بعد به زبان ریاضی.

الف) می‌گیم عمل جمع (+) روی $\mathbb{N}$ بسته است، هرگاه:

"برای هر دو عدد دلخواه عضو $\mathbb{N}$، مجموعشون هم عضو $\mathbb{N}$ باشد."

به زبان ریاضی می‌شه: $\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \in \mathbb{N}$

ب) جابه‌جایی عمل جمع (+) روی $\mathbb{Z}$ یعنی:

"به ازای هر دو عدد دلخواه عضو $\mathbb{Z}$ داریم: عدد اول + عدد دوم = عدد دوم + عدد اول"

به زبان ریاضی می‌شه: $\forall x,y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y = y+x$

ج) شرکت‌پذیری عمل ضرب روی $\mathbb{Z}$ یعنی:

به ازای هر سه عدد دلخواه عضو $\mathbb{Z}$ داریم: (عدد سوم × عدد دوم) × عدد اول = عدد سوم × (عدد دوم × عدد اول)

به زبان ریاضی می‌شه: $\forall x,y,z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

د) پخش‌پذیری عمل ضرب روی عمل جمع برای $\mathbb{Z}$ یعنی:

"به ازای هر سه عدد دلخواه عضو $\mathbb{Z}$ داریم: (عدد سوم × عدد اول) + (عدد دوم×عدد اول) = (عدد سوم + عدد دوم)×عدد اول"

به زبان ریاضی می‌شه: $\forall x,y,z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

خاصیت پخش‌پذیری رو بر عکس هم می‌شه نگاه کرد: $xy + xz = x(y+z)$

به این کار تو ریاضی فاکتورگیری می‌گیم. خیلی هم پرکاربرده! معمولاً برای راحتی محاسباتمون عاملای مشترک رو فاکتور می‌گیریم.

۳ اعداد اول و تجزیه

۱ تعریف: اعداد اول، اعدادی طبیعی هستند که به جز خودشان و ۱ بر عدد دیگری بخش‌پذیر نیستند.

تذکر: به جز ۱ و اعداد اول، بقیه‌ی اعداد، مرکب هستند.

۲ تجزیه‌ی یک عدد طبیعی:

روش: برای تجزیه‌ی یک عدد طبیعی، یک خطِ عمودی می‌کشیم و عددی را که می‌خواهیم تجزیه کنیم، سمت چپِ این خط عمودی قرار می‌دهیم، سپس گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: اولین عدد اول، که سمت چپِ خط عمودی، به آن بخش‌پذیر می‌باشد را پیدا کنید و روبه‌روی آن در سمتِ راستِ خطِ عمودی قرار بدهید و به گام بعد بروید.

گام دوم: آخرین عدد سمت چپ را به عدد مقابلش تقسیم کنید، و حاصل را زیر عدد سمت چپ بنویسید و به گام بعد بروید!

گام سوم: در صورتی‌که آخرین عددِ سمت چپ ۱ شود، کار تجزیه به پایان رسیده (که همون حاصل‌ضرب عددهای اول سمتِ راستِ خط عمودیه) در غیر این‌صورت به گام ۱ بروید و همین روند را تکرار کنید.

توجه: اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۹، ۲۳ و ۲۹ در تجزیه‌ی اعداد، بسیار کاربردی هستند!

مثال آموزشی

● **اعداد زیر را به عامل‌های اول تجزیه کنید:**

الف) ۲۴ **ب) ۷۵۹**

حل:

الف)

۲۴	۲
۱۲	۲
۶	۲
۳	۳
۱	

$\Rightarrow ۲۴ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۲^۳ \times ۳$

ب)

۷۵۹	۳
۲۵۳	۱۱
۲۳	۲۳
۱	

$\Rightarrow ۷۵۹ = ۳ \times ۱۱ \times ۲۳$

۴ محاسبه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

۱ تعریف ب.م.م: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک را به اختصار با عبارت «ب.م.م» نشان می‌دهند. ب.م.م دو عدد a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهند و طبق تعریف بزرگ‌ترین عدد طبیعی است که هر دو عدد a و b بر آن بخش‌پذیر هستند.

۲ روش پیدا کردن ب.م.م دو عدد:

گام اول: دو عدد را تجزیه کنید.

گام دوم: عامل‌های اول مشترک بین دو عدد را مشخص کنید.

گام سوم: کوچک‌ترین توان هر عامل مشترک بین دو عدد را به دست آورید.

گام چهارم: حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان را به دست آورید. عدد به دست آمده، ب.م.م دو عدد است.

توجه: اگر دو عدد، عامل اول مشترک نداشته باشند، ب.م.م برابر ۱ است. در این حالت، دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم و می‌نویسیم:

$(a,b)=۱$

مثال آموزشی

● **الف) ب.م.م دو عدد ۱۹۸ و ۴۲۰ را به دست آورید.**

ب) ب.م.م دو عدد $x=۲^k\times۳^۲\times۱۱^m$ و $y=۲^۴\times۳^n\times۱۱^۲$ برابر ۱۳۲ است. حاصل $m+n+k$ را بیابید.

حل: الف) گام اول برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد ۱۹۸ و ۴۲۰ ، ابتدا ۱۹۸ و ۴۲۰ را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۱۹۸ & ۲ \\ ۹۹ & ۳ \\ ۳۳ & ۳ \\ ۱۱ & ۱۱ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۹۸=۲\times۳^۲\times۱۱$$

$$\begin{array}{r|l} ۴۲۰ & ۲ \\ ۲۱۰ & ۲ \\ ۱۰۵ & ۳ \\ ۳۵ & ۵ \\ ۷ & ۷ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۴۲۰=۲^۲\times۳\times۵\times۷$$

گام دوم اعداد ۲ و ۳، عوامل اول مشترک بین دو عدد ۱۹۸ و ۴۲۰ هستند.

گام سوم کوچک‌ترین توان ۲، عدد ۱ و کوچک‌ترین توان ۳ هم عدد ۱ می‌باشد.

گام چهارم $(۴۲۰,۱۹۸)=۲^۱\times۳^۱=۲\times۳$

ب) ابتدا ۱۳۲ رو تجزیه می‌کنیم تا همه‌ی داده‌های مسأله را به صورت تجزیه شده داشته باشیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۳۲ & ۲ \\ ۶۶ & ۲ \\ ۳۳ & ۳ \\ ۱۱ & ۱۱ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۳۲=۲^۲\times۳\times۱۱$$

از طرفی $(x,y)=۱۳۲$. یعنی $۲^۲\times۳\times۱۱$ حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک بین x و y با کوچک‌ترین توان هستند. با توجه به گام ۳ نتیجه می‌گیریم که عدد ۲، که توان ۲ است کوچک‌ترین عدد بین k و ۴ می‌باشد، یعنی $k=۲$. به همین‌ترتیب کوچک‌ترین عدد بین n و ۲، که توان‌های ۳ هستند برابر ۱ است. یعنی $n=۱$. بین m و ۲ کوچک‌ترین عدد، ۱ می‌باشد. یعنی $m=۱$. پس: $m+n+k=۱+۱+۲=۴$

۳ تعریف ک.م.م: کوچک‌ترین مضرب مشترک را به اختصار با عبارت «ک.م.م» نشان می‌دهند. ک.م.م دو عدد a و b را با نماد $[a,b]$ نمایش می‌دهند و طبق تعریف کوچک‌ترین عدد طبیعی است که بر هر دو عدد a و b بخش‌پذیر باشد.

۴ روش پیدا کردن ک.م.م دو عدد:

گام اول: دو عدد را تجزیه کنید.

گام دوم: تمام عوامل اول موجود در تجزیه‌ی دو عدد را به دست آورید.

گام سوم: بزرگ‌ترین توان هر عامل اول، بین دو عدد را به دست آورید.

گام چهارم: حاصل‌ضرب تمام عوامل اول (مشترک و غیر مشترک)، با بزرگ‌ترین توان بین دو عدد را محاسبه کنید. عدد به دست آمده، ک.م.م دو عدد است.

نکته: برای هر دو عدد طبیعی a و b داریم: $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$

مثال آموزشی

● **الف) ک.م.م دو عدد ۱۵۴ و ۳۶ را به دست آورید.**

ب) ک.م.م. دو عدد $x=۲^n\times۵^m\times۷^p$ و $y=۲^۲\times۱۱^r$ برابر ۲۸۰ شده، مقدار $m+n+p+r$ را محاسبه کنید.

حل: الف) **گام اول** ابتدا دو عدد ۱۵۴ و ۳۶ را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۱۵۴ & ۲ \\ ۷۷ & ۷ \\ ۱۱ & ۱۱ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۵۴=۲\times۷\times۱۱ \qquad \begin{array}{r|l} ۳۶ & ۲ \\ ۱۸ & ۲ \\ ۹ & ۳ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۳۶=۲^۲\times۳^۲$$

گام دوم اعداد ۲، ۳، ۷، ۱۱ عوامل اول موجود در تجزیه‌ی دو عدد ۳۶ و ۱۵۴ هستند.

گام سوم بزرگ‌ترین توان ۲، برابر ۲، بزرگ‌ترین توان ۳ برابر ۲، بزرگ‌ترین توان ۷ برابر ۱ و بزرگ‌ترین توان ۱۱، برابر یک می‌باشد.

گام چهارم $[۳۶,۱۵۴]=۲^۲\times۳^۲\times۷\times۱۱$

ب) ۲۸۰ را تجزیه می‌کنیم تا همه‌ی اعداد مسأله را به صورت تجزیه شده داشته باشیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۸۰ & ۲ \\ ۱۴۰ & ۲ \\ ۷۰ & ۲ \\ ۳۵ & ۵ \\ ۷ & ۷ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۲۸۰=۲^۳\times۵\times۷$$

با توجه به گام ۳ آموزه‌ی ۸:

بزرگ‌ترین عدد بین n و ۲ (توان عامل ۲) برابر ۳ می‌باشد، در نتیجه $n=۳$.

بزرگ‌ترین عدد بین m و صفر (توان عامل ۵) برابر m می‌باشد، پس $m=۱$.

بزرگ‌ترین عدد بین p و صفر (توان عامل ۷، بین دو عدد x و y) برابر یک است، پس $p=۱$.

چون در تجزیه ۲۸۰ اصلا عامل ۱۱ را نداریم، پس توان ۱۱ درy هم صفر است، یعنی $r=۰$.

در نتیجه: $m+n+p+r=۱+۳+۱+۰=۵$

۵ اعمال اصلی بین اعداد گویا

۱ تعریف اعداد گویا: هر عدد کسری به صورت $\frac{a}{b}$ که در آن $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{N}$ باشد را عددی گویا می‌نامیم.

۲ جمع و تفریق دو عدد گویا: برای به دست آوردن جواب این دوتا عمل، مخرج مشترک کسرها رو می‌گرفتیم، که همون ک.م.م مخرج‌هاشون بود، مثلاً:

$$\frac{۳}{۸}-\frac{۵}{۱۲}\overset{[۸,۱۲]=۲۴}{=\!=\!=\!=}\frac{۹}{۲۴}-\frac{۱۰}{۲۴}=\frac{۹-۱۰}{۲۴}=\frac{-۱}{۲۴} \qquad \frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۷}=\frac{۲\times۷}{۲۱}+\frac{۳\times۳}{۲۱}=\frac{۱۴+۹}{۲۱}=\frac{۲۳}{۲۱}$$

۳ ضرب دو عدد گویا: برای به دست آوردن حاصل‌ضرب دوتا عدد گویا، صورت‌ها رو تو همدیگه و مخرج‌ها رو هم، تو همدیگه ضرب می‌کردیم:

$$\frac{-۴}{۳}\times\frac{۸}{۵}=\frac{-۴\times۸}{۳\times۵}=\frac{-۳۲}{۱۵} \qquad \frac{۲}{۳}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۲\times۵}{۳\times۷}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

و به‌طور کلی: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

۴ تقسیم دو عدد گویا: تو تقسیم دوتا عدد گویا، عدد اول رو ضرب در معکوس عدد دوم می‌کردیم:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{۳}{۵}\div۴=\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۲۰} \qquad \frac{۲}{۷}\div\frac{۵}{۶}=\frac{۲}{۷}\times\frac{۶}{۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

تا حالا قطعاً عبارت «**دور در دور، نزدیک در نزدیک**» رو شنیدید 🙂 این بود دیگه...

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

دور در دور — نزدیک در نزدیک

مثال آموزشی

● **حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.**

الف) $-\frac{۱}{۳}\div(\frac{۲}{۱۵}-\frac{۴}{۱۰})-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۱}{۱۰}-\frac{۱}{۵}$ ب) $-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times۳+\frac{۱}{۲}\div(\frac{۱}{۴}-(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{۵})+\frac{۱}{۲})$

حل: الف) بنا به اولویت عمل‌ها که تو شروع درسنامه براتون گفتم، اول داخل همه‌ی پرانتزها رو ساده می‌کنیم، بعد از سمت چپ به راست، عملیات ضرب و تقسیم رو انجام می‌دیم. آخرش هم جمع و تفریقا رو انجام می‌دیم:

$$-\frac{۱}{۳}\div(\frac{۲}{۱۵}-\frac{۴}{۱۰})-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۱}{۱۰}-\frac{۱}{۵}=-\frac{۱}{۳}\div(\frac{۴-۱۲}{۳۰})-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۱}{۱۰}-\frac{۱}{۵}$$

$$=-\frac{۱}{۳}\div(\frac{-۸}{۳۰})-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۱}{۱۰}-\frac{۱}{۵}=-\frac{۱}{۳}\times\frac{-۳۰}{۸}-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۱}{۱۰}-\frac{۱}{۵}=\frac{۳۰}{۳\times۸}-\frac{۲\times۱۱}{۳\times۱۰}-\frac{۱}{۵}=\frac{۱۰}{۸}-\frac{۱۱}{۱۵}-\frac{۱}{۵}$$

$$=\frac{۱۵۰-۸۸}{۱۲۰}-\frac{۱}{۵}=\frac{۶۲}{۱۲۰}-\frac{۱}{۵}=\frac{۳۱}{۶۰}-\frac{۱}{۵}=\frac{۳۱}{۶۰}-\frac{۱۲}{۶۰}=\frac{۱۹}{۶۰}$$

ب)

$$\frac{-۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times۳+\frac{۱}{۲}\div(\frac{۱}{۴}-(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{۵})+\frac{۱}{۲})=\frac{-۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times۳+\frac{۱}{۲}\div(\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۳}-\frac{۴}{۵})+\frac{۱}{۲})$$

$$=\frac{-۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times۳+\frac{۱}{۲}\div(\frac{۱}{۴}-\frac{-۷}{۱۵}+\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times۳+\frac{۱}{۲}\div(\frac{۱۵+۲۸+۳۰}{۶۰})=-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times۳+\frac{۱}{۲}\div\frac{۷۳}{۶۰}$$

$$=-\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶۰}{۷۳}=\frac{-۱}{۵}+\frac{۳}{۲}+\frac{۳۰}{۷۳}=\frac{-۱۴۶+۱۰۹۵+۳۰۰}{۷۳۰}=\frac{۱۲۴۹}{۷۳۰}$$

> اگر صورت و مخرج یک کسر، مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را به مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم. از طرفی اگر صورت و مخرج یک کسر را به ب.م.م‌شان ساده کنیم، می‌توانیم مطمئن شویم که، صورت و مخرج کسر، دیگر ساده نمی‌شوند (یعنی صورت و مخرج کسر، نسبت به هم اول هستند) و چنین کسری را کسر تحویل‌ناپذیر می‌گوییم.

۶ مقایسه‌ی دو کسر

برای مقایسه‌ی دو کسر دو گام زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: به کمک ک.م.م مخرج‌ها، دو کسر را هم‌مخرج کنید.

گام دوم: صورت کسرهای هم‌مخرج را مقایسه کنید.

مثلاً در مقایسه‌ی دو کسر $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$، اول مخرج دو کسر را یکی می‌کنیم:

$$[۷,۵]=۳۵\Rightarrow\begin{cases}\frac{۴}{۷}=\frac{۴\times۵}{۷\times۵}=\frac{۲۰}{۳۵}\\[2pt]\frac{۳}{۵}=\frac{۳\times۷}{۵\times۷}=\frac{۲۱}{۳۵}\end{cases}$$

با توجه به اینکه $\frac{۲۰}{۳۵}=\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۲۱}{۳۵}=\frac{۳}{۵}$، مشخص که: $\frac{۴}{۷}<\frac{۳}{۵}$ 🙂

بین دو تا کسر $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۳}{۵}$ معلومه که کسر $\frac{۲}{۵}$ وجود داره، بین دو تا کسر $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۵}$ چی؟ آیا کسر دیگه‌ای هست؟ برای اینکه بفهمیم، راهش اینه که، بیایم صورت و مخرج هر دوتا کسر رو تو ۲ ضرب کنیم: می‌شه $\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲\times۲}{۲\times۵}$ و $\frac{۶}{۱۰}=\frac{۲\times۳}{۲\times۵}$، که $\frac{۵}{۱۰}$ بین این دوتاست. در واقع $\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}<\frac{۵}{۱۰}<\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$.

۷ اعداد اعشاری

۱ جمع و تفریق اعداد اعشاری:

می‌خوام حاصل $۱۴۳/۹۳۷+۵۲/۲$ رو به دست بیارم:

اعشار زیر اعشار

$$\begin{array}{r}\overset{۱}{۱۴۳}\ /\ ۹۳۷\\ +\ ۵۲\ /\ ۲۰۰\\ \hline ۱۹۶\ /\ ۱۳۷\end{array}$$

به تعدادی صفر می‌ذاریم که رقم‌های قسمت‌های اعشاری هر دو تا عدد یکی بشه.

برای تفریق دو عدد هم، همین کار رو می‌کردیم:

اعشار زیر اعشار

$$\begin{array}{r}\overset{۰\ ۱۴}{\cancel{۱}\cancel{۴}۳}\ /\ ۹۳۷\\ -\ ۵۲\ /\ ۲۰۰\\ \hline ۹۱\ /\ ۷۳۷\end{array}$$

۲ ضرب و تقسیم اعداد اعشاری:

برای تعیین حاصل‌ضرب $۱۴/۱\times۳۲/۰۲۵$، اعداد رو بدون ممیز، تو هم‌دیگه ضربشون می‌کنم: $۳۲۰۲۵\times۱۴۱=۴۵۱۵۵۲۵$

چون عددِ $۳۲/۰۲۵$ سه رقم اعشاری و عددِ $۱۴/۱$ یه رقم اعشاری داره، پس قسمت اعشاری حاصل‌ضرب این دو عدد، $(۳+۱=۴)$ رقم می‌شه، یعنی $۳۲/۰۲۵\times۱۴/۱=۴۵۱/۵۵۲۵$.

برای تقسیم $۱۶/۳۳۵$ بر $۱/۲۱$، مقسوم و مقسوم‌علیه (یعنی $۱۶/۳۳۵$ و $۱/۲۱$) رو تو ۱۰۰۰ ضرب می‌کنم، تا مقسوم و مقسوم‌علیه‌مون، از حالت اعشاری خارج بشه.

$$\overset{\times۱۰۰۰}{۱۶/۳۳۵}\ \Big|\ \overset{\times۱۰۰۰}{۱/۲۱}\ \Rightarrow\ \begin{array}{r|l}۱۶۳۳۵ & ۱۲۱۰\\ -۱۲۱۰ & \overline{۱۳/۵}\\ \hline ۴۲۳۵ & \\ -۳۶۳۰ & \\ \hline ۶۰۵۰ & \\ -۶۰۵۰ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پس می‌تونم نتیجه بگیرم:

$$۱۶/۳۳۵\div۱/۲۱=\frac{۱۶/۳۳۵}{۱/۲۱}\ \xrightarrow{\text{ضرب در } \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰}}\ \frac{۱۶۳۳۵}{۱۲۱۰}=۱۳/۵$$

البته حواستون باشه، خیلی وقتا، راحت‌تریم که در حسابِ اعداد اعشاری، اعداد اعشاریمون رو به کسر تبدیل کنیم، بعد محاسبات رو انجام بدیم.

مثال آموزشی

● **حاصل عبارات مقابل را بیابید:**

الف) $۰/۱-۰/۰۱-۲\times۰/۴-(۲/۲\div۰/۵-۲/۹۵)$

ب) $\dfrac{(۱۲\div۰/۰۵)\times۱/۹}{(۰/۰۰۱\div۰/۰۵)+۲/۹۵}$

حل: الف) اولویت عمل‌ها رو که یادتون هست؟!!

$$۰/۱-۰/۰۱-۲\times۰/۴-(۲/۲\div۰/۵-۲/۹۵)=۰/۱-۰/۰۱-۲\times۰/۴-(۲/۲\div\frac{۵}{۱۰}-۲/۹۵)$$

$$=۰/۱-۰/۰۱-۲\times۰/۴-(۲/۲\times\frac{۱۰}{۵}-۲/۹۵)=۰/۱-۰/۰۱-۲\times۰/۴-(۴/۴-۲/۹۵)$$

$$=۰/۱-۰/۰۱-۲\times۰/۴-(۱/۴۵)=۰/۱-۰/۰۱-۰/۸-۱/۴۵=۰/۹۹-۲/۲۵=-۱/۲۶$$

ب) $\dfrac{(۱۲\div ۰/۰۵)\times ۱/۹}{(۰/۰۰۱\div ۰/۰۵)+۲/۹۵}=\dfrac{(۱۲\div \frac{۵}{۱۰۰})\times ۱/۹}{(\frac{۱}{۱۰۰۰}\div \frac{۵}{۱۰۰})+۲/۹۵}=\dfrac{(۱۲\times \frac{۱۰۰}{۵})\times ۱/۹}{(\frac{۱}{۱۰۰۰}\times \frac{۱۰۰}{۵})+۲/۹۵}$

$$=\dfrac{۲۴۰\times ۱/۹}{\frac{۱}{۵۰}+۲/۹۵}=\dfrac{۴۵۶}{۰/۰۲+۲/۹۵}=\dfrac{۴۵۶}{۲/۹۷}=\dfrac{۴۵۶}{۲۹۷\times ۱۰^{-۲}}=\dfrac{۴۵۶}{۲۹۷\times ۱۰^{-۲}}\times\dfrac{۱۰^{۲}}{۱۰^{۲}}=\dfrac{۴۵۶\times ۱۰^{۲}}{۲۹۷}$$

$$\begin{array}{r|l}
۴۵۶۰۰ & ۲۹۷ \\ \cline{2-2}
-۲۹۷ & ۱۵۳/۵۳۵۳... \\ \cline{1-1}
۱۵۹۰ & \\
-۱۴۸۵ & \\ \cline{1-1}
۱۰۵۰ & \\
-۸۹۱ & \\ \cline{1-1}
۱۵۹۰ & \\
-۱۴۸۵ & \\ \cline{1-1}
۱۰۵۰ & \\
-۸۹۱ & \\ \cline{1-1}
۱۵۹۰ & \\
\vdots &
\end{array}$$

اگر تا ابد هم این تقسیم را ادامه دهیم، به باقیمانده‌ی صفر نمی‌رسیم. از طرفی در قسمت اعشاری عدد ۵۳ مدام تکرار می شود. به این اعداد، **اعداد اعشاری متناوب** می‌گویند و به عدد ۵۳ که در قسمت اعشار، تکرار می‌شود، **دوره‌ی گردش** یا **دوره‌ی تناوب** می‌گویند. این عدد اعشاری را به صورت $۱۵۳/\overline{۵۳}$ نشان می‌دهیم.

۳ انواع اعداد اعشاری

اگر در خارج قسمت تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b یک یا چندین رقم بعد از ممیز، پشتِ سر هم تکرار شوند، خارج قسمت را عدد اعشاری متناوب گوییم و کسر $\frac{a}{b}$ را کسر مولد عدد اعشاری متناوب می‌گویند. به ارقام تکرار شونده‌ی پس از ممیز، دوره‌ی گردش می‌گویند.

اعداد اعشاری متناوب، خودشون به دو دسته تقسیم می‌شن:

اعداد اعشاری متناوب ساده: در صورتی‌که بلافاصله بعد از ممیز در عدد اعشاری متناوب، دوره‌ی گردش آغاز شود، عدد اعشاری را متناوب ساده می‌گویند.

به طور مثال: $\frac{۱}{۳}=۰/\overline{۳}$ و $\frac{۱}{۹}=۰/\overline{۱}$ و $\frac{۱}{۷}=۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$، اعداد اعشاری متناوب ساده هستند.

اعداد اعشاری متناوب مرکب: در صورتی‌که بلافاصله بعد از ممیز در عدد اعشاری متناوب، دوره‌ی گردش آغاز نشود، عدد اعشاری را متناوب مرکب می‌گویند. به عبارت بهتر بعد از ممیز، ابتدا چند رقم می‌آیند و بعد از آن‌ها دوره‌ی گردش آغاز می‌شود.

مثلاً $۰/۱\overline{۸}=/۱۸۸=\frac{۱}{۶}$ متناوب مرکب است.

اعداد اعشاری مختوم: در صورتی‌که حاصل تقسیم a بر b (که $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{N}$) پس از چند رقم اعشار، به باقیمانده‌ی صفر برسد، حاصل تقسیم را یک عدد اعشاری مختوم می‌گویند.

۴ اعداد اعشاری مهم:

کسرهایی که در مخرج آن‌ها فقط عامل‌هایی از ۲ یا ۵ وجود دارد را می‌توان به راحتی به اعداد اعشاری تبدیل کرد. برای این کار کافی است صورت و مخرج کسر را در عددی ضرب کنیم تا مخرج به صورت ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... درآید. به عنوان مثال:

الف) $\frac{۳}{۵}\xrightarrow[\times ۲]{\times ۲}\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$ ب) $\frac{۷}{۲۵}\xrightarrow[\times ۴]{\times ۴}\frac{۲۸}{۱۰۰}=۰/۲۸$ ج) $\frac{۹}{۲۰}\xrightarrow[\times ۵]{\times ۵}\frac{۴۵}{۱۰۰}=۰/۴۵$

ایستگاه ۱ مجموعه‌ها

مقدمه

در این فصل قراره با مجموعه‌ها شروع کنیم و در ابتدا نگاهی گذرا به مجموعه‌ها خواهیم داشت.

تعریف مجموعه: گروهی از اشیاء کاملاً معین را که در یک دسته قرار می‌گیرند، مجموعه می‌نامیم. مثل مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاسی یا مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۰.

نمادگذاری و نمایش مجموعه: مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A، B، C و ... نمایش می‌دهند. معمولاً اعضای هر مجموعه را بین دو علامت آکولاد قرار می‌دهیم.

عضو بودن: اگر A یک مجموعه باشد و شیء b در آن عضو باشد، این‌گونه نمایش می‌دهیم: $b\in A$ و اگر a عضو مجموعه‌ی A نباشد، به صورت $a\notin A$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌ی تهی: اگر مجموعه‌ای بدون عضو باشد، آن را تهی می‌نامیم و به صورت نمادهای { } یا $\varnothing$ نمایش می‌دهیم. حواستان باشد که هیچ‌گاه مجموعه‌ی تهی را به صورت $\{\varnothing\}$ نشان ندهید، زیرا این مجموعه دیگر تهی نیست و عضو دارد.

زیرمجموعه: اگر همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A عضو مجموعه‌ی B باشد، گوییم «A زیرمجموعه‌ی B است.» و می‌نویسیم $A \subset B$. به عنوان مثال مجموعه‌ی $A=\{a,b\}$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $B=\{a,b,c,d\}$ می‌باشد، زیرا تمام عضوهای مجموعه‌ی A یعنی $\{a,b\}$ در مجموعه‌ی B هم هست.
نکات مهم زیر را به خاطر بسپارید:

- تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است: $\varnothing \subset A$
- هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه‌ی خودش است: $A \subset A$
- در مجموعه‌ها عضوهای تکراری به حساب نمی‌آید و می‌توان آن‌ها را حذف کرد.
- در مجموعه‌ها ترتیب نوشتن عضوها مهم نیست.
- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی برابر 2^n است.
- به همه‌ی زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی دلخواه به جز خود آن مجموعه، زیرمجموعه‌های محض یا سره‌ی آن گفته می‌شود، لذا یک مجموعه‌ی nعضوی دارای 2^n-1 زیرمجموعه‌ی محض است.

مثال آموزشی

- **یک مجموعه دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است، این مجموعه چند عضو دارد؟**

حل: مطابق با نکات قبلی، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی nعضوی برابر 2^n است. پس:
$$2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$
لذا مجموعه‌ی فوق دارای ۹ عضو است.

تساوی دو مجموعه: دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گویند هرگاه همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B و همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی A وجود داشته باشد، به عبارت دیگر دو مجموعه‌ی A و B با هم مساوی‌اند هرگاه: $A \subset B \ , \ B \subset A$

جبر مجموعه‌ها

۱ اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهند و عبارت است از مجموعه‌ای که اعضای دو مجموعه A و B را در آن نوشته‌ایم، البته یادتان باشد که عضوهای تکراری را فقط یک دفعه بنویسید. به عنوان مثال:
$$\begin{cases} A=\{1,2,3,b\} \\ B=\{2,4,a\} \end{cases} \Rightarrow A\cup B=\{1,2,3,4,a,b\}$$

۲ اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهند و عبارت است از مجموعه‌ای از عضوهایی که بین دو مجموعه‌ی A و B مشترک است. برای نمونه داریم:
$$\begin{cases} A=\{1,2,3,b\} \\ B=\{2,4,a\} \end{cases} \Rightarrow A\cap B=\{2\}$$

۳ تفاضل دو مجموعه: تفاضل دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A-B$ و $B-A$ نشان می‌دهند و مجموعه‌ی $A-B$ عبارت است از مجموعه‌ای که عضوهای آن در مجموعه‌ی A باشد ولی در B نباشد، به عنوان مثال:
$$\begin{cases} A=\{1,2,3,a,b\} \\ B=\{3,5,7,a,c\} \end{cases} \Rightarrow A-B=\{1,2,b\}$$

مجموعه‌ی مرجع: مجموعه‌ای که شامل همه‌ی عضوهای مجموعه‌هایی باشد که در مورد آن بحث می‌کنیم را مجموعه‌ی مرجع یا مادر می‌نامیم و معمولاً با حروف M یا U نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی متمّم: مجموعه‌ی متمّم یک مجموعه شامل تمام اعضاء مجموعه‌ی مرجع به جز اعضاء مجموعه‌ی مورد بحث می‌باشد. اگر مجموعه‌ی مورد بحث A باشد، مجموعه‌ی متمّم آن با نماد A' نمایش داده می‌شود. به عنوان مثال، اگر $M=\{1,2,3,\ldots,10\}$ و $A=\{1,2,\ldots,7\}$ باشد، مجموعه A' برابر است با:
$$A' = M - A = \{8,9,10\}$$

تذکر: با توجه به تعریف عمل متمّم در مجموعه‌ها، تفاضل هر مجموعه را به صورت مقابل نیز می‌توان تعریف کرد: $A-B=A\cap B'$

مجموعه‌ی اعداد

مجموعه‌ی متناهی و نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن محدود باشد را مجموعه‌ی متناهی و مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن نامحدود باشد را نامتناهی می‌نامیم.
مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$، شامل زیرمجموعه‌های زیر است: (مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک مجموعه‌ی نامتناهی است.)

۱ مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

۲ مجموعه‌ی اعداد حسابی: مجموعه‌ای است از اجتماع مجموعه‌ی اعداد طبیعی و عدد صفر $W=\{0,1,2,3,\ldots\}$

۳ مجموعه‌ی اعداد صحیح: مجموعه‌ای است از اجتماع اعداد حسابی و قرینه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

۴ مجموعه‌ی اعداد گویا:
$$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0, (p,q)=1\} \xrightarrow{\text{مانند}} \{\ldots,-3,-\frac{4}{3},\ldots,\frac{-1}{2},\ldots,0,\ldots,\frac{1}{2},\ldots,2,\ldots\}$$
یعنی مجموعه‌ی اعداد گویا شامل اعداد طبیعی و صحیح نیز هست. (منظور از نماد $(p,q)=1$، یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح برابر ۱ باشد.)

۵ اعداد گنگ:
$$\mathbb{Q}'=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\notin\mathbb{Q}\}=\{\ldots,-2-\sqrt{3},\ldots,-\sqrt{5},\ldots,\sqrt{2},\pi,\ldots\}$$
اعداد گنگ اعدادی هستند که نتوان آن را به فرم $\frac{p}{q}$ درآورد به طوری که p و q اعداد صحیح باشند، مانند $\sqrt{2}\neq\frac{p}{q}$.
بنابراین می‌توان گفت: $\mathbb{N}\subset W\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

تست نمونه

● اگر a و b اعداد گویا و $a(\sqrt{2}-1)+b(\sqrt{2}+2)=6$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲-   ۳) ۴   ۴) ۴-

حل: $a\sqrt{2}-a+b\sqrt{2}+2b=6\Rightarrow(a+b)\sqrt{2}+(2b-a)=6$

چون سمت چپ باید مساوی عدد گویای ۶ شود، لازم است که به صورت یک عدد گویا نوشته شود:
$\begin{cases}a+b=0\\2b-a=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow a-b=-4$

دقت نمایید مجموع دو عدد گویا عددی گویا است.

ایستگاه ۲ توان و قوانین مربوط به آن

توان

اگر $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$، آن‌گاه: $a^n=\underbrace{a\times a\times...\times a}_{n\ \text{بار}}$ که در این رابطه a را پایه و n را توان می‌نامیم.

۱) $a^0=1$

۲) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\Rightarrow(\frac{a}{b})^{-n}=(\frac{b}{a})^n$

۳) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

۴) $a^m\times b^m=(ab)^m$

۵) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

۶) $\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m$

۷) $(a^m)^n=a^{m\times n}\to(a^m)^n\neq a^{m^n}$

۸) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

۹) $(a^m)^n=(a^n)^m$

مثال آموزشی

● حاصل عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{3^5\times(4^6+4^6+4^6)}{6^6}$

ب) $8^3\times9^2\times25^5\times(3^6+3^6)$

ج) $2^{10}+8^3\times3+16^3+3\times2^9$

د) $\frac{(\frac{9}{7})^5\times(\frac{7}{3})^6\times(\frac{9}{4})^{-5}}{((0/25)^{-3}\div4^{-5})\times7}$

حل:

الف) $\frac{3^5\times(4^6+4^6+4^6)}{6^6}=\frac{3^5\times(3\times4^6)}{6^6}=\frac{(3^5\times3)\times4^6}{6^6}=\frac{3^6\times4^6}{6^6}=\frac{(3\times4)^6}{6^6}=\frac{12^6}{6^6}=(\frac{12}{6})^6=2^6$

ب) $8^3\times9^2\times25^5\times(3^6+3^6)=(2^3)^3\times(3^2)^2\times(5^2)^5\times(2\times3^6)=2^{10}\times3^{10}\times5^{10}=(2\times3\times5)^{10}=30^{10}$

ج) $2^{10}+8^3\times3+16^3+3\times2^9=2^{10}+(2^3)^3\times3+(2^4)^3+3\times2^9=2^{10}+2^9\times3+2^{12}+3\times2^9=2^{10}+2\times(2^9\times3)+2^{12}$

$=2^{10}+2^{10}\times3+2^{10+2}=2^{10}+2^{10}\times3+2^{10}\times2^2=2^{10}(1+3+4)=2^{10}\times8=2^{10}\times2^3=2^{13}$

د) $\frac{(\frac{9}{7})^5\times(\frac{7}{3})^6\times(\frac{9}{4})^{-5}}{((0/25)^{-3}\div4^{-5})\times7}=\frac{\frac{9^5}{7^5}\times\frac{7^6}{3^6}\times(\frac{4}{9})^5}{((\frac{1}{4})^{-3}\times\frac{1}{4^{-5}})\times7}=\frac{\frac{9^5}{7^5}\times\frac{7\times7^5}{3^6}\times\frac{4^5}{9^5}}{((\frac{1}{4})^{-3}\times(\frac{1}{4})^{-5})\times7}=\frac{\frac{7\times(2^2)^5}{3^6}}{(\frac{1}{4})^{-3-5}\times7}=\frac{\frac{7\times2^{10}}{3^6}}{(\frac{1}{4})^{-8}\times7}=$

$=\frac{\frac{7\times2^{10}}{3^6}}{4^8\times7}=\frac{\frac{7\times2^{10}}{3^6}}{(2^2)^8\times7}=\frac{\frac{7\times2^{10}}{3^6}}{2^{16}\times7}=\frac{7\times2^{10}}{3^6\times2^{16}\times7}=\frac{2^{10}}{3^6\times2^{10}\times2^6}=\frac{1}{3^6\times2^6}=\frac{1}{(3\times2)^6}=\frac{1}{6^6}=(\frac{1}{6})^6$

تست نمونه

● حاصل عبارت $81^3\times\left[50\times(\frac{3^{-2}}{5})^2\right]^3$ کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۰

حل: $(3^4)^3\times\left[2\times5^2\times\frac{3^{-4}}{5^2}\right]^3=3^{12}\times2^3\times3^{-12}=3^{12+(-12)}\times2^3=2^3=8$

● اگر $a=3^{k+1}$ و $b=9^k$ باشد، آن‌گاه کدام رابطه بین a و b همواره برقرار است؟

۱) $a^2=9b$ ۲) $3a=b$ ۳) $2a=b+1$ ۴) $a^2=3b+1$

حل: $a=3^{k+1}\Rightarrow a^2=(3^{k+1})^2=3^{2k+2}=(3^2)^k\times3^2=9^k\times9=b\times9=9b\Rightarrow a^2=9b$

● از رابطهٔ $4^{2x-1}\times 3^{y+2}=96$ حاصل $\frac{9}{4}(x+y)^{-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: ابتدا x و y را از رابطهٔ اول می‌یابیم:

$$4^{2x-1}\times 3^{y+2}=96\Rightarrow (2^2)^{2x-1}\times 3^{y+2}=2^5\times 3^1$$

$$\Rightarrow 2^{4x-2}\times 3^{y+2}=2^5\times 3^1\Rightarrow\begin{cases}4x-2=5\Rightarrow x=\frac{7}{4}\\ y+2=1\Rightarrow y=-1\end{cases}\Rightarrow \frac{9}{4}(x+y)^{-1}=\frac{9}{4}(\frac{7}{4}-1)^{-1}=\frac{9}{4}\times(\frac{3}{4})^{-1}=\frac{9}{4}\times\frac{4}{3}=3$$

چندجمله‌ای یا کثیرالجمله‌ای

فرم کلی چندجمله‌ای درجهٔ ۱: $P(x)=ax+b \quad (a\neq 0)$

فرم کلی چندجمله‌ای درجهٔ ۲: $P(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

فرم کلی چندجمله‌ای درجهٔ ۳: $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$

صورت کلی یک چندجمله‌ای درجهٔ n برحسب x عبارت است از: $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+k \quad (a\neq 0)$

چندجمله‌ای متحد با صفر

اگر یک چندجمله‌ای متحد با صفر باشد، لازم و کافی است که تمام ضرایب آن صفر باشد (در غیر این صورت تبدیل به معادله‌ای می‌شود که تنها به ازای بعضی مقادیر عددی از متغیر برابر صفر خواهد بود.) بنابراین:
$ax^n+bx^{n-1}+...+k\equiv 0\Leftrightarrow a=0\ ,b=0\ ,...,k=0$

تست نمونه

● اگر به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم $(2a-b)x+b-6=0$ ، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۲

حل: چون تساوی فوق به ازای جمیع مقادیر x برقرار است، می‌توان طرف دوم تساوی را به صورت $0\times x+0$ نوشت. با مقایسهٔ دو طرف تساوی داریم:

$$\begin{cases}b-6=0\Rightarrow b=6\\ 2a-b=0\Rightarrow 2a=b=6\Rightarrow a=3\end{cases}$$

دو چندجمله‌ای متحد با هم

دو چندجمله‌ای وقتی با هم متحدند که ضرایب نظیرشان با هم مساوی باشند. بنابراین:

$$ax^n+bx^{n-1}+...+k\equiv a'x^n+b'x^{n-1}+...+k'\Leftrightarrow a=a',b=b',...,k=k'$$

تست نمونه

● اگر به ازای جمیع مقادیر x، رابطهٔ $\frac{c}{x+2}+\frac{b}{x+1}+\frac{a}{x}=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ برقرار باشد، $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

حل: با مخرج‌مشترک‌گیری بین عبارت‌های سمت راست تساوی و مرتب‌نمودن آن‌ها داریم:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\Rightarrow\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 1=(a+b+c)x^2+...\Rightarrow a+b+c=0$$

دقت کنید که در تساوی بالا سمت چپ معادله x^2 نداریم، پس باید سمت راست معادله هم x^2 نداشته باشیم، به همین دلیل ضریب x^2 باید صفر باشد.

ایستگاه ۳ اتحادهای جبری و تجزیه

اتحادهای مقدماتی

۱) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

۲) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

۳) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ (اتحاد مربع سه‌جمله‌ای)

۴) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (اتحاد مکعب دوجمله‌ای)

۵) $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (اتحاد مکعب دوجمله‌ای)

۶) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ (اتحاد مزدوج)

۷) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ (اتحاد جملهٔ مشترک)

۸) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

۹) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$

(اتحادهای چاق و لاغر)

اتحادهای کمکی

1. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$
2. $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
3. $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
4. $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$
5. $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$
6. $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$
7. $(x^3+y^3+z^3)-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ (اتحاد لاگرانژ- اویلر)

نتیجه‌ی اتحاد لاگرانژ ـ اویلر: اگر $x+y+z=0$ باشد، سمت راست اتحاد مساوی صفر می‌شود و در نتیجه داریم:

$$x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$

یعنی اگر مجموع سه عدد حقیقی صفر باشد مجموع مکعب‌های آن‌ها برابر است با سه برابر حاصل‌ضرب آن سه عدد.

مثال آموزشی

● **حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

الف) $(1-\sin x)(1+\sin x)$ ب) $(3x-2)(3x+5)$ ج) 998×1002

حل:

الف) $(1-\sin x)(1+\sin x)\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}1^2-\sin^2 x=1-\sin^2 x=\cos^2 x$

ب) $(3x-2)(3x+5)\xlongequal{\text{اتحاد جمله مشترک}}(3x)^2+(-2+5)(3x)+(-2)(5)=9x^2+9x-10$

ج) $998\times 1002=(1000-2)(1000+2)=(1000)^2-(2)^2=1000000-4=999996$

● **هریک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.**

الف) $x^2+5x-24$ ب) $x^2-x-\frac{24}{25}$ ج) x^4-9

د) $1+\cos^3 x$ و) $\sin^3 x-\cos^3 x$ هـ) $4x^2+8x-5$

حل: الف) برای تجزیه‌ی عبارت داده شده از اتحاد جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم، یعنی: $x^2+5x-24=(x+?)(x+?)$. حال باید به دنبال دو عدد باشیم که مجموع آن دو عدد برابر ۵ و حاصل‌ضربشان (۲۴-) باشد، که واضح است این دو عدد ۸ و ۳- می‌باشند، پس:

$$x^2+5x-24=(x-3)(x+8)$$

ب) $x^2-x-\frac{24}{25}=(x-\frac{8}{5})(x+\frac{3}{5})$

جمع دو عدد $=-1$ ضرب دو عدد $=-\frac{24}{25}\Rightarrow -\frac{8}{5},\frac{3}{5}$

توجه: در عبارت‌های درجه‌ی دو، اگر $\Delta<0$ باشد، عبارت را نمی‌توان تجزیه کرد.

ج) $(x^4-9)=(x^2-3)(\underbrace{x^2+3}_{\Delta<0\Rightarrow})=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)$

د) $1+\cos^3 x=1^3+(\cos x)^3\xlongequal{\text{اتحاد چاق و لاغر}}(1+\cos x)(1^2-1\times\cos x+\cos^2 x)=(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)$

و) $\sin^3 x-\cos^3 x\xlongequal{\text{چاق و لاغر}}(\sin x-\cos x)[\underbrace{(\sin x)^2+\sin x\cos x+(\cos x)^2}_{\sin^2 x+\cos^2 x=1}]=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)$

ضرب دو عدد $=-5\Rightarrow +5,-1$

هـ) $4x^2+8x-5=(2x)^2+4(2x)-5=(2x+5)(2x-1)$

جمله‌ی مشترک جمع دو عدد $=4$

تکنیک‌های تجزیه

تکنیک اول ـ فاکتورگیری

مثال آموزشی

● **تجزیه کنید:** $A=x^4y^3+2x^3y^4+x^2y^5$

حل: همانطور که ملاحظه می‌کنید تمام جملات عبارت جبری فوق، دارای عامل x^2y^3 هستند، در نتیجه با فاکتور گرفتن عامل x^2y^3 از عبارت فوق داریم:

$$A=x^2y^3(x^2+2xy+y^2)=x^2y^3(x+y)^2\Rightarrow A=x^2y^3(x+y)(x+y)$$

تکنیک دوم ـ دسته‌بندی

مثال آموزشی

● **عبارت‌های زیر را تجزیه کنید:**

الف) $x^2+2a+4x-a^2+3$ ب) $x^3+7x^2-4x-28$ ج) $xz+yw+yz+xw$

حل: الف) کلید حل این سؤال دسته‌بندی مناسب جملات می‌باشد:

$$x^2+2a+4x-a^2+3=x^2+2a+4x-a^2+4-1=(x^2+4x+4)+(-a^2+2a-1)=(x+2)^2-(a^2-2a+1)$$
$$=(x+2)^2-(a-1)^2=(x+2-a+1)(x+2+a-1)=(x-a+3)(x+a+1)$$

ب) در این سؤال نیز، باید جملات به گونه‌ای مناسب دسته‌بندی شوند، سپس با فاکتورگیری مناسب، تجزیه کامل می‌شود.

$$x^3+7x^2-4x-28=x^3-4x+7x^2-28=x(x^2-4)+7(x^2-4)=(x^2-4)(x+7)=(x-2)(x+2)(x+7)$$

ج) جملات با یک عامل مشترک را کنار هم دسته‌بندی می‌کنیم، سپس از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم:

$$xz+yw+yz+xw=xz+yz+yw+xw=z(x+y)+w(y+x)=(x+y)(z+w)$$

همونطور که گفتم، تکنیک کلی برای تجزیه‌ی عبارات جبری وجود نداره و ابزار اصلی حل سؤالات مربوط به تجزیه، ابتکار عمل و تسلط بر اتحادهاست که هر دوی اینا، با تمرین زیاد به دست میاد.

نکته مهم: تجزیه عبارت ax^2+bx+c موقعی که a مربع کامل نیست.

وقتی a مربع کامل نباشد نمی‌توان با اتحاد جمله‌ی مشترک عبارت را تجزیه کرد. در این حالت مراحل زیر را انجام دهید.

۱ ضریب x^2، یعنی a را برداشته و در c ضرب کنید و به جای c بگذارید.

۲ عبارت به دست آمده را با اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه کنید.

۳ در تجزیه به دست آمده، دو پرانتز به صورت $(x+k)(x+k')$ وجود دارد که حتماً یکی از اعداد k یا k' بر a بخش‌پذیر است. در این حالت آن عدد ثابتی که بر a بخش‌پذیر است را بر a تقسیم نموده و در پرانتز دیگر ضریب x را در a ضرب کنید. به مثال زیر توجه کنید

مثال آموزشی

● **عبارت $(3x^2+11x-20)$ را تجزیه کنید.**

حل:

$$\overset{\times}{\overline{3x^2+11x-20}}\xrightarrow{\text{گام اول}}x^2+11x-60\xrightarrow{\text{گام دوم}}x^2+11x-60=(x+15)(x-4)$$
$$\xrightarrow{\text{گام سوم}}(x+\underbrace{\frac{15}{3}}_{\text{۱۵ بر ۳ تقسیم‌پذیر است}})(\underbrace{3x}_{\text{ضریب x در ۳ ضرب می‌شود}}-4)\Rightarrow 3x^2+11x-20=(x+5)(3x-4)$$

تست نمونه

● **اگر $x+\frac{1}{x}=5$ باشد، حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ کدام است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۱۷ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

حل: با استفاده از اتحادهای کمکی داریم:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2(x)(\frac{1}{x})\xrightarrow{\text{با توجه به صورت سؤال}}x^2+\frac{1}{x^2}=5^2-2=23$$

● **اگر $x+\frac{1}{x}=a$ باشد، حاصل $x^3+\frac{1}{x^3}$ همواره برابر کدام است؟**

۱) a^3 ۲) a^3-3a ۳) a^3+3a ۴) a^3+3

حل: با استفاده از اتحادهای کمکی داریم:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\times(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})\xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}}x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a$$

● **اگر $x+\frac{1}{x}=4$ و $x>\frac{1}{x}$ باشد، حاصل $x-\frac{1}{x}$ کدام است؟**

۱) $-2\sqrt{3}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲- ۴) $2\sqrt{3}$

حل: از تفاضل اتحاد اول و دوم داریم:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=4x(\frac{1}{x})=4$$
$$\xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}}4^2-(x-\frac{1}{x})^2=4\Rightarrow(x-\frac{1}{x})^2=16-4=12\Rightarrow|x-\frac{1}{x}|=\sqrt{12}\xrightarrow{\text{با فرض } x>\frac{1}{x}}\Rightarrow x-\frac{1}{x}=2\sqrt{3}$$

● **معادله‌ی $(5x-7)^3+(4-3x)^3+(3-2x)^3=0$ چند ریشه دارد؟**

۱) ریشه ندارد. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: مجموع سه پرانتز داده شده برابر صفر است، بنابراین طبق نتیجه‌ی اتحاد لاگرانژ، مجموع مکعب‌های آن‌ها با سه برابر حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است، پس:

$$(5x-7)+(4-3x)+(3-2x)=0\Rightarrow 0=(5x-7)^3+(4-3x)^3+(3-2x)^3=3(5x-7)(4-3x)(3-2x)$$
$$\Rightarrow 5x-7=0\Rightarrow x=\frac{7}{5}\quad,\quad 4-3x=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}\quad,\quad 3-2x=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

نکته بسیار مهم: روش مربع کامل کردن عبارت‌های درجه‌ی دو:

از اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌دانیم که $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$. پس عبارت $x^2+2ax+a^2$ را می‌توانیم بـه صـورت $(x+a)^2$ یعنـی یـک عبـارت مربـع کامـل بنویسیم. حال می‌خواهیم بدانیم که عبارت x^2+kx را چگونه به‌صورت یک مربع کامل بنویسیم. از این نکته در محاسبه‌ی برد توابع درجـه‌ی ۲، محاسـبه‌ی مـاکزیمم و مینیمم مطلق و مقاطع مخروطی زیاد استفاده می‌شود. به‌طور کلی برای مربع کامل کردن هر عبارت به فرم کلی $Ax^2\pm Bx$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ ابتدا از A فاکتور بگیرید تا ضریب x^2 برابر یک شود، یعنی: $Ax^2\pm Bx=A(x^2\pm\frac{B}{A}x)$

۲ ضریب x را نصف کنید و سپس آن را به توان ۲ برسانید، یعنی: $\frac{B}{A}\xrightarrow{\text{نصف}}\frac{B}{2A}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{B^2}{4A^2}$

۳ این عبارت را به داخل پرانتز اضافه و کم کنید، یعنی: $A(x^2\pm\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2})$

۴ سه‌جمله‌ی اول داخل پرانتز همان سه‌جمله‌ی اتحاد مربع دوجمله‌ای است یعنی: $x^2\pm\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}=(x\pm\frac{B}{2A})^2$

۵ حال شما توانسته‌اید $Ax^2\pm Bx$ را به فرم مربع کامل بنویسید، یعنی:

$$Ax^2\pm Bx=A[(x\pm\frac{B}{2A})^2-\frac{B^2}{4A^2}]\Rightarrow Ax^2\pm Bx=A(x\pm\frac{B}{2A})^2-A\times\frac{B^2}{4A^2}=A(x\pm\frac{B}{2A})^2-\frac{B^2}{4A}$$

۶ پس به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$Ax^2\pm Bx=A(x^2\pm\frac{B}{A}x)=A[(x\pm\text{نصف ضریب } x)^2-(\text{نصف ضریب } x)^2]$$

مثال آموزشی

● حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به فرم مربع کامل بنویسید:

الف) x^2-8x+1 ب) $x(x-3)$ ج) $3x^2-12x+5$ د) $8x^2+x$

حل:

الف) $x^2-8x+1=[(x-\underset{\text{نصف ضریب } x}{4})^2-\underset{\text{مربع نصف ضریب } x}{16}]+1=(x-4)^2-15$

ب) $x(x-3)=x^2-3x=(x-\underset{\text{نصف ضریب } x}{\frac{3}{2}})^2-\underset{\text{مربع نصف ضریب } x}{\frac{9}{4}}$

ج) $3x^2-12x+5=3(x^2-4x)+5=3[(x-\underset{\text{نصف ضریب } x}{2})^2-\underset{\text{مربع نصف ضریب } x}{4}]+5=3(x-2)^2-12+5=3(x-2)^2-7$

د) $8x^2+x=8(x^2+\frac{1}{8}x)=8[(x+\frac{1}{16})^2-(\frac{1}{16})^2]=8(x+\frac{1}{16})^2-8\times\frac{1}{16^2}=8(x+\frac{1}{16})^2-\frac{1}{32}$

تست نمونه

● عبارت $4x^2-8x+y^2+2y=11$ را به‌صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ نوشته‌ایم، حاصل $\frac{ab}{\alpha\beta}$ چقدر است؟ $(a,b>0)$

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۱ ۴) ۱-

حل: کافی است عبارت‌های شامل x و y را به صورت مربع کامل درآوریم:

$$\begin{cases}4x^2-8x=4(x^2-2x)=4[(x-1)^2-1]=4(x-1)^2-4\\ y^2+2y=(y+1)^2-1\end{cases}\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه}}4(x-1)^2-4+(y+1)^2-1=11$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2+(y+1)^2=16\xrightarrow{\div 16}\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{16}=1\xrightarrow{\text{مقایسه با رابطه‌ی داده شده}}\begin{cases}\alpha=1,\beta=-1\\ a^2=4\to a=2\\ b^2=16\to b=4\end{cases}\Rightarrow\frac{ab}{\alpha\beta}=\frac{2\times4}{(1)(-1)}=-8$$

ایستگاه ۴ ب.م.م و ک.م.م

محاسبه‌ی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک بین چندجمله‌ای‌ها

۱ **مقدمه:** در چندجمله‌ای‌ها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع، ضرب و مفهوم بخش‌پذیری برقرار است، پس می‌توانیم ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌هـا را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

۲ تعریف ۱: بنا به تعریف، بزرگ‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ بر آن بخش‌پذیر است را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (به اختصار ب.م.م) $p(x)$ و $q(x)$ می‌نامند.

۳ تعریف ۲: کوچک‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچک‌ترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م) $p(x)$ و $q(x)$ می‌نامند.

برای محاسبه‌ی ب.م.م و ک.م.م، ابتدا درصورت لزوم به کمک اتحادهای جبری هر یک از چندجمله‌ای‌ها را به عوامل مشترک و غیرمشترک تجزیه و سپس به کمک دستور زیر ب.م.م و ک.م.م را محاسبه می‌کنیم.

ب.م.م = حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با کم‌ترین توان

ک.م.م = حاصل‌ضرب عامل‌های غیرمشترک و حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با بیشترین توان

تذکر: ب.م.م. دو عدد a و b را با نماد (a,b) و ک.م.م. این دو عدد را با نماد $[a,b]$ نمایش می‌دهند.

مثال آموزشی

● **ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌های $p(x)=x^3+8$ ، $q(x)=x^6-64$ و $r(x)=5x^2-20$ را تعیین کنید.**

حل:

$$\begin{cases} x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4) \\ x^6-64=(x^3+8)(x^3-8)=[(x+2)(x^2-2x+4)][(x-2)(x^2+2x+4)] \\ 5x^2-20=5(x^2-4)=5(x-2)(x+2) \end{cases}$$

با توجه به تجزیه‌ی نمایش داده شده برای $p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ داریم:

$$\text{ب.م.م}: (p,q,r)=(x+2)$$

$$\text{ک.م.م}: [p,q,r]=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)\times 5=5(x^6-64)$$

● **حاصل عبارت روبه‌رو را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.** $\dfrac{x+5}{x-1}-\dfrac{6}{x^2+x+1}-\dfrac{6(x^2+2)}{x^3-1}$

حل: از سال‌های قبل می‌دانیم که مخرج مشترک چند کسر، همان ک.م.م مخرج کسرهای موجود می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\xrightarrow{\text{ک.م.م}}[(x-1),(x^2+x+1),(x^3-1)]=x^3-1$$

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{6}{x^2+x+1}-\frac{6(x^2+2)}{x^3-1}=\frac{(x+5)(x^2+x+1)-6(x-1)-6(x^2+2)}{x^3-1}$$

$$=\frac{x^3+\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{5x^2}+\cancel{5x}+5-\cancel{6x}+6-\cancel{6x^2}-12}{x^3-1}=\frac{x^3-1}{x^3-1}=1$$

● **طول قطر چرخ‌های کوچک و بزرگ یک تراکتور به ترتیب ۹۰ و ۱۵۰ سانتی‌متر است. اگر در ابتدای حرکت، نقاط روی زمین این چرخ‌ها را علامت‌گذاری کنیم، این تراکتور حداقل چه مسافتی را باید طی کند تا این نقاط روی چرخ‌ها مجدداً با هم به زمین برسند؟ $(\pi=3/14)$**

حل: برای آن‌که عددی را انتخاب نماییم که همه‌ی خصوصیات دو عدد a و b در آن وجود داشته باشد، باید ک.م.م دو عدد a و b را انتخاب نماییم.

در این مسئله مشخص است که جابه‌جایی تراکتور برابر محیط پیموده شده توسط چرخ‌های آن می‌باشد و برای آن‌که نقاط علامت‌گذاری شده دوباره با هم به زمین برسند باید ک.م.م دو عدد ۹۰ و ۱۵۰ را محاسبه نماییم و کاملاً واضح است که دو نقطه‌ی علامت‌گذاری شده روی چرخ‌ها در مضارب مشترک ۹۰ و ۱۵۰ به هم می‌رسند و چون در این سؤال حداقل مسافت طی شده را می‌خواهد، ک.م.م دو عدد را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 150=2\times3\times5^2 \\ 90=2\times3^2\times5 \end{cases}\to[90,150]=2\times3^2\times5^2=450$$

حداقل مسافت طی شده توسط تراکتور = محیط پیموده شده توسط چرخ‌ها $=450\times\pi=450\times3/14\simeq1413\text{cm}$

تست نمونه

● **بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $A=x^2+2xy-15y^2$ و $B=x^2-10xy+21y^2$ کدام است؟**

۱) $x-3y$ ۲) $x+3y$ ۳) $3x-y$ ۴) $3x+y$

حل: ابتدا A و B را تجزیه نموده و سپس برای محاسبه‌ی ب. م. م، عامل‌های مشترک با توان کم‌تر را انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{matrix} A=(x+5y)(x-3y) \\ B=(x-7y)(x-3y) \end{matrix}\Rightarrow \text{ب.م.م}=x-3y$$

● **تفاضل بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۴۸۰ از کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد چقدر است؟**

۱) $2^7\times5$ ۲) $2^4\times3^2\times5$ ۳) $2^4\times3\times29$ ۴) $2^4\times3^2\times23$

حل: ابتدا ۱۴۴ و ۴۸۰ را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{matrix} 144=2^4\times3^2 \\ 480=2^5\times3\times5 \end{matrix}\Rightarrow\begin{cases} \text{ک.م.م}=C=2^5\times3^2\times5 \\ \text{ب.م.م}=d=2^4\times3^1 \end{cases}$$

$$C-d=2^5\times3^2\times5-2^4\times3^1=2^4\times3^1(2\times3\times5-1)=2^4\times3\times29$$

عبارات گویا

۱ تعریف: به عبارت‌های جبری که پس از عملیات ساده کردن، به شکل یک کسر در می‌آیند که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای می‌باشند، عبارت‌های گویا می‌گویند.

۲ ساده کردن عبارت‌های گویا:

روش: برای ساده کردن یک عبارت گویا گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: صورت و مخرج کسر را به‌طور جداگانه تجزیه می‌کنیم.

گام دوم: عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

مثال آموزشی

● **عبارت گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.**

الف) $\dfrac{xy^3-x^3y}{x^2+y^2+2xy}$ ب) $\dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^3-1}$ ج) $\dfrac{x^3+12x-6x^2-8}{xy+x-2y-2}$

حل: ابزارتون برای حل این مدل سوالا تجزیه کردنه!

الف) $\dfrac{xy^3-x^3y}{x^2+y^2+2xy}=\dfrac{xy(y^2-x^2)}{(x+y)^2}=\dfrac{xy(y-x)\cancel{(y+x)}}{(y+x)\cancel{(y+x)}}=\dfrac{xy(y-x)}{x+y}$

ب) $\dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^3-1}=\dfrac{x(x^2-6x+5)}{(x-1)(x^2+x(1)+1^2)}=\dfrac{x(x-5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\dfrac{x(x-5)}{x^2+x+1}$

ج) $\dfrac{x^3+12x-6x^2-8}{xy+x-2y-2}=\dfrac{x^3+3(-2)^2x+3(-2)x^2+(-2)^3}{x(y+1)-2(y+1)}=\dfrac{(x-2)^3}{(y+1)(x-2)}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-2)^2}{(y+1)\cancel{(x-2)}}=\dfrac{(x-2)^2}{y+1}$

۳ جمع و تفریق عبارات گویا

همانطور که در جمع و تفریق اعداد گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گرفتیم و بعد عملیات جمع و تفریق رو انجام می‌دادیم، در مورد عبارت‌های گویا هم ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و بعد عملیات جمع و تفریق رو با در نظر گرفتن قوانین عملیات جبری روی چند جمله‌ایها، انجام می‌دیم.

مثال آموزشی

● **عملیات زیر را انجام دهید و حاصل را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.**

الف) $\dfrac{x^6}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{x^2+1}$ ب) $\dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ ج) $\dfrac{-2}{x}+\dfrac{2x+1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}$

د) $\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{x^2-5x+4}$ هـ) $\dfrac{-x}{x^3-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$

حل:

الف) $\dfrac{x^6}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^6-x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2(x^4-1)}{x^2+1}=\dfrac{x^2(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)}=x^2(x^2-1)$

ب) $\dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-x-1+x-1}{x^2-1}=\dfrac{-2}{x^2-1}$

ج) $\dfrac{-2}{x}+\dfrac{2x+1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{-2x^3}{x^4}+\dfrac{x^2(2x+1)}{x^4}-\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{-2x^3+2x^3+x^2-1}{x^4}=\dfrac{x^2-1}{x^4}$

د) $\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)(x-4)}$

$=\dfrac{x-4}{(x-1)^2(x-4)}+\dfrac{x-1}{(x-1)^2(x-4)}=\dfrac{x-4+x-1}{(x-1)^2(x-4)}=\dfrac{2x-5}{(x-1)^2(x-4)}$

هـ) $\dfrac{-x}{x^3-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{-x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{-x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}+\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{-x^2-x+x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$

۴ ضرب و تقسیم عبارات گویا

عبارات گویا را هم مانند اعداد گویا، می‌توانیم در هم ضرب و یا بر هم تقسیم کنیم. البته قوانین عملیات جبری روی چند جمله‌ای‌ها را هم باید در نظر داشته باشیم.

مثال آموزشی

● **عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.**

الف) $\left(\dfrac{x-1}{x^2+y^2}\right)\left(\dfrac{x^4-y^4}{x^2-1}\right)$ ب) $\dfrac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}{1-x^{32}}$

حل: الف)

$$(\frac{x-۱}{x^۲+y^۲})(\frac{x^۴-y^۴}{x^۲-۱})=\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲-y^۲)\cancel{(x^۲+y^۲)}}{\cancel{(x^۲+y^۲)}\cancel{(x-۱)}(x+۱)}=\frac{x^۲-y^۲}{x+۱}$$

ب) اگه صورت و مخرج کسر رو در $(۱-x)$ ضرب کنیم، با ۵ بار استفاده از اتحاد مزدوج کسر ساده می‌شه.

$$\frac{(۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۴)(۱+x^۸)}{۱-x^{۳۲}}\times\frac{۱-x}{۱-x}=\frac{(۱+x)(۱-x)(۱+x^۲)(۱+x^۴)(۱+x^۸)}{(۱-x^{۳۲})(۱-x)}$$

$$=\frac{(۱-x^۲)(۱+x^۲)(۱+x^۴)(۱+x^۸)}{(۱-x^{۳۲})(۱-x)}=\frac{(۱-x^۴)(۱+x^۴)(۱+x^۸)}{(۱-x^{۳۲})(۱-x)}=\frac{(۱-x^۸)(۱+x^۸)}{(۱-x^{۳۲})(۱-x)}=\frac{\cancel{(۱-x^{۱۶})}}{\cancel{(۱-x^{۱۶})}(۱+x^{۱۶})(۱-x)}=\frac{۱}{(۱+x^{۱۶})(۱-x)}$$

ایستگاه ۵ رادیکال و قوانین مربوط به آن

رادیکال‌ها

به طور کلی اگر $a^n=b$ باشد، آن‌گاه عدد a را ریشه‌ی nاُم عدد b می‌نامیم و n را فرجه‌ی رادیکال و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

$$a^n=b\Rightarrow a=\sqrt[n]{b}$$

نکات مهم در رادیکال‌ها:

۱ تبدیل رادیکال به عدد توان‌دار: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

۲ به توان‌رساندن رادیکال‌ها: $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

یعنی وقتی رادیکال‌ها به توان می‌رسند، فقط عبارت زیر رادیکال به توان می‌رسد.

نتیجه: هرگاه رادیکال‌ها را به توان فرجه‌ی همان رادیکال برسانیم، رادیکال حذف می‌شود. $(\sqrt[n]{a})^n=a$

۳ فرجه و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توان در یک عدد ضرب نمود: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\times k]{a^{m\times k}}$

۴ بردن ضریب **بیرون رادیکال** به داخل رادیکال: ضریب به توان فرجه می‌رسد. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\times b}\quad(a>۰)$

تذکر: اگر فرجه زوج و ضریب رادیکال منفی باشد، باید منفی قبل از عدد را نگه داشت و قدرمطلق عدد را داخل رادیکال برد.

۵ ساده‌کردن رادیکال، هرگاه فرجه و توان عبارت زیر رادیکال یکسان باشد:

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & ,\ n \text{ زوج}\\ a & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x^۲}=|x| \text{ و } \sqrt[۳]{x^۳}=x$$

۶ رادیکال‌های پی‌درپی: فرجه‌ها در هم ضرب می‌شود: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[n\times m\times p]{a}$

رادیکال‌های متشابه: دو رادیکال را «متشابه» می‌نامیم هرگاه فرجه و عبارت زیر رادیکال در هر دو یکسان باشد مانند $\sqrt[۳]{۲}$ و $-۳\sqrt[۳]{۲}$.

مثال آموزشی

● **حاصل عبارات زیر را به دست آورید.**

الف) $\sqrt[۳]{۴۰}\times\sqrt[۳]{۲۵}$ **ب)** $\sqrt{(-۲)^۲\times(۲)^۴}$ **ج)** $\frac{\sqrt[۳]{۴۰}}{\sqrt[۳]{۵}}$

د) $\sqrt[۲]{(-۱۲)^۶}$ **ه)** $\sqrt[۳]{۰/۰۰۸}$ **و)** $\frac{\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{\sqrt[۵]{۹}}}\times\sqrt[۱۵]{۳^۲}}{\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳}}\times\sqrt[۵]{۹}}$

حل:

الف) $\sqrt[۳]{۴۰}\times\sqrt[۳]{۲۵}=\sqrt[۳]{۲^۳\times۵}\times\sqrt[۳]{۵^۲}=\sqrt[۳]{۲^۳\times۵\times۵^۲}=\sqrt[۳]{۲^۳\times۵^۳}=\sqrt[۳]{(۲\times۵)^۳}=۲\times۵=۱۰$

ب) $\sqrt{(-۲)^۲\times۲^۴}=\sqrt{۲^۲\times۲^۴}=\sqrt{۲^{۲+۴}}=\sqrt{۲^۶}=\sqrt{(۲^۳)^۲}=|۲^۳|=۸$

ج) $\frac{\sqrt[۳]{۴۰}}{\sqrt[۳]{۵}}=\sqrt[۳]{۴۰}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}}=\sqrt[۳]{۴۰}\times(\sqrt[۳]{۵})^{-۱}=\sqrt[۳]{۴۰}\times\sqrt[۳]{۵^{-۱}}=\sqrt[۳]{۴۰}\times\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۳]{\frac{۴۰}{۵}}=\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{۲^۳}=۲$

د) $\sqrt[۲]{(-۱۲)^۶}=\sqrt[۲]{((-۱۲)^۳)^۲}=|(-۱۲)^۳|=|-۱۲^۳|=۱۲^۳$

ه) $\sqrt[۳]{۰/۰۰۸}=\sqrt[۳]{۸\times۱۰^{-۳}}=\sqrt[۳]{۲^۳\times۱۰^{-۳}}=\sqrt[۳]{۲^۳\times(۱۰^{-۱})^۳}=\sqrt[۳]{(۲\times۱۰^{-۱})^۳}=۲\times۱۰^{-۱}=۰/۲$

و) $\frac{\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{\sqrt[۵]{۹}}}\times\sqrt[۱۵]{۳^۲}}{\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳}}\times\sqrt[۵]{۹}}=\frac{\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{(۳^۲)^{\frac{۱}{۵}}}}\times\sqrt[۱۵]{۳^۲}}{\sqrt[۵]{۳^{-۱}}\times\sqrt[۵]{۳^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{(۳^{\frac{۲}{۵}})^{\frac{۱}{۲}}}\times(۳^۲)^{\frac{۱}{۱۵}}}{(۳^{-۱})^{\frac{۱}{۵}}\times(۳^۲)^{\frac{۱}{۵}}}=\frac{(۳^{\frac{۱}{۵}})^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۲}{۱۵}}}{۳^{-\frac{۱}{۵}}\times۳^{\frac{۲}{۵}}}=\frac{۳^{\frac{۱}{۱۵}}\times۳^{\frac{۲}{۱۵}}}{۳^{-\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۵}}}=\frac{۳^{\frac{۳}{۱۵}}}{۳^{\frac{۱}{۵}}}=\frac{۳^{\frac{۱}{۵}}}{۳^{\frac{۱}{۵}}}=۱$

● اگر $x<0$ و $y<0$ و $z>0$ باشد، عبارت $\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[3]{y^3}+\sqrt{z^2}+\sqrt[6]{(x+y)^6}+\sqrt[3]{(x+y)^3}$ را ساده کنید.

حل:

$$\begin{array}{ccccccccc}\sqrt[4]{x^4} & + & \sqrt[3]{y^3} & + & \sqrt{z^2} & + & \sqrt[6]{(x+y)^6} & + & \sqrt[3]{(x+y)^3}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ |x| & + & y & + & |z| & + & |x+y| & + & (x+y)\end{array}$$

چون $x<0$ پس $|x|=-x$ و با توجه به $z>0$ پس $|z|=z$. چون $x,y<0$ پس $x+y<0$ در نتیجه $|x+y|=-(x+y)$. با جایگذاری رابطه‌ی بالا داریم:

$$\Rightarrow |x|+y+|z|+|x+y|+(x+y)=-x+y+z+(-(x+y))+x+y=-x+y+z-x-y+x+y=y-x+z$$

اعمال اصلی روی رادیکال‌ها

۱ جمع و تفریق: برای جمع و تفریق رادیکال‌ها در جملات با رادیکال‌های متشابه، ضرایب را با هم جمع و تفریق می‌کنیم. مانند:

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=$ به همین صورت نوشته می‌شود $\qquad 3\sqrt{2}+4\sqrt[3]{2}-5\sqrt{2}=4\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$

۲ ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

الف) فرجه‌ها یکسان باشند: زیر رادیکال ضرب یا تقسیم می‌شود. $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ و $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

ب) فرجه‌ها یکسان نباشند: در این حالت ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها را محاسبه نموده و فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم سپس طبق رابطه‌ی بالا، رادیکال‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم، به مثال روبه‌رو توجه کنید: $2\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{b}=2\sqrt[12]{a^4}\times\sqrt[12]{b^3}=2\sqrt[12]{a^4b^3}$

تست نمونه

● حاصل $2\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-9\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{32}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) $-\sqrt[3]{4}$ ۴) $2\sqrt[3]{4}$

حل: $2\sqrt[3]{27\times4}+\sqrt[3]{125\times4}-9\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{8\times4}=6\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}-9\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{4}=0$

● حاصل $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: $7+4\sqrt{3}$ را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت: $7+4\sqrt{3}=4+3+4\sqrt{3}=2^2+(\sqrt{3})^2+2\times2\times\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$

$$\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$$

● اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt[n-1]{\frac{x}{\sqrt[n]{x}}}$، برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[n]{\frac{1}{x}}$ ۲) $\sqrt[n]{x}$ ۳) $\sqrt[n]{x^2}$ ۴) $|x^{\frac{1}{n}}|$

حل: $\sqrt[n-1]{\frac{x}{x^{\frac{1}{n}}}}=\sqrt[n-1]{x^{1-\frac{1}{n}}}=\sqrt[n-1]{x^{\frac{n-1}{n}}}=\sqrt[n-1]{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=|x^{\frac{1}{n}}|$

● حاصل $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{20}(5+2\sqrt{6})^{10}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۱

حل: $\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\right]^{10}(5+2\sqrt{6})^{10}=(5-2\sqrt{6})^{10}(5+2\sqrt{6})^{10}=(25-24)^{10}=1$

گویاکردن مخرج کسرها

منظور از گویاکردن مخرج یک کسر، تبدیل آن به کسری است که مخرج آن اصم نباشد و برای گویاکردن معمولاً صورت و مخرج را در یک «عامل مساوی» ضرب می‌کنیم، که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

اگر مخرج کسری $\sqrt{a}$ یا $\sqrt[3]{a}$ باشد، به ترتیب با ضرب و تقسیم در $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{a^2}$ گویا می‌شود.

۱) $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$

۲) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

مثال $\frac{\sqrt{8}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4\times2}}{2(2+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}-1$

۳ $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

$\xrightarrow{\text{مثال}}\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}\times\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5^2-(2\sqrt{6})^2}=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{25-24}=5+2\sqrt{6}$

۴ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$

۵ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$

۶ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$

۷ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$

تست نمونه

● عدد $\dfrac{2}{\sqrt[5]{8}}$، برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) $\sqrt[5]{2}$ ۴) $\sqrt[5]{4}$

حل: صورت و مخرج کسر را در یک «عامل مساوی» مطابق مورد ۱ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{8}}=\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}\times\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\sqrt[5]{4}}{2}=\sqrt[5]{4}$$

همانطور که مشاهده کردید، اگر صورت و مخرج را در $\sqrt[5]{2^2}$ ضرب کنیم، در مخرج فرجه‌ی رادیکال برابر با توان عبارت زیر رادیکال می‌شود و عدد ۲ از زیر رادیکال بیرون می‌آید.

● حاصل $\dfrac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{150}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

حل:

$$\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}\times\frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{25\times 6}=\frac{5\sqrt{6}+12}{25-24}-5\sqrt{6}=5\sqrt{6}+12-5\sqrt{6}=12$$

ایستگاه ۶ بخش‌پذیری

۱ تقسیم چندجمله‌ای‌ها

در سال پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $p(x)$ بر یک چندجمله‌ای مانند $g(x)$ یک خارج قسمت $q(x)$ و باقیمانده‌ی $r(x)$ به دست می‌آید و می‌توان نوشت: $p(x)=g(x)q(x)+r(x)$

تذکر: هر تقسیم از ۴ قسمت مختلف تشکیل شده است:

$$\text{مقسوم}\leftarrow p(x)=\underbrace{g(x)}_{\text{مقسوم‌علیه}}\overset{\text{خارج قسمت}}{q(x)}+r(x)\rightarrow\text{باقیمانده}$$

به طوری که همواره درجه‌ی باقیمانده از درجه‌ی مقسوم علیه کم‌تر می‌باشد و مجموع درجات مقسوم علیه و خارج قسمت با درجه‌ی مقسوم برابر است.

تذکر: برای تقسیم، حتماً در ابتدا جملات مقسوم و مقسوم‌علیه را از بزرگ‌ترین توان به کم‌ترین توان بنویسید، یعنی به صورت نزولی مرتب کنید. سپس اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم نموده و جواب را در محل خارج قسمت بنویسید و سپس جواب را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و علامت آن را عوض کنید و زیر مقسوم بنویسید و با مقسوم جمع کنید و این را عمل را آنقدر ادامه می‌دهید تا درجه‌ی باقیمانده از مقسوم‌علیه کم‌تر شود. (مثال روبه‌رو)

$$\begin{array}{l|l}
4x^4-x^3 & x^2+x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4-4x^3} & 4x^2-5x+5 \\
\quad -5x^3 & \\
\quad \underline{+5x^3+5x^2} & \\
\qquad +5x^2 & \\
\qquad \underline{-5x^2-5x} & \\
\qquad\quad -5x &
\end{array}$$

توجه: به طور کلی اگر چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی m را بر چندجمله‌ای $g(x)$ از درجه‌ی $n\,(m\geq n)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت این تقسیم $q(x)$ و باقیمانده‌ی تقسیم $r(x)$ باشد، واضح است که $q(x)$ از درجه‌ی $(m-n)$ و درجه‌ی $r(x)$ همواره از n کم‌تر است و حداکثر می‌تواند $(n-1)$ باشد. به تقسیم مقابل توجه کنید.

در این مثال $p(x)=4x^4-x^3$ از درجه‌ی ۴ و $g(x)=x^2+x$ از درجه‌ی ۲ و $q(x)=4x^2-5x+5$ از درجه‌ی $4-2=2$ و $R(x)=-5x$ از درجه‌ی ۱ است و $1<2$.

۲ محاسبه‌ی باقیمانده‌ی چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$:

طبق قضیه‌ی تقسیم و نکات گفته شده داریم: $p(x)=(x-a)q(x)+r \qquad (I)$

چون مقسوم علیه $(x-a)$ از درجه‌ی اول است بنابراین درجه‌ی r برابر صفر است یعنی r برابر یک عدد می‌باشد.

رابطه‌ی (I) به ازای جمیع مقادیر x برقرار است. حال ریشه‌ی مقسوم علیه را محاسبه نموده و آن را در رابطه‌ی (I) قرار می‌دهیم.

$$x-a=0 \to x=a \xrightarrow{(I)} p(a)=\underbrace{(a-a)}_{\text{صفر}}q(a)+r=0+r=r \Rightarrow p(a)=r$$

نکته‌ی ۱: برای پیداکردن باقیمانده‌ی تقسیم بر یک چندجمله‌ای درجه‌ی یک کافی است ریشه‌ی مقسوم علیه را پیدا کرده و در مقسوم جایگذاری کنیم:

$$p(x)=(x-a)q(x)+r \Rightarrow \boxed{r=p(a)}$$

نتیجه‌ی ۱: اگر در تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$، $p(a)$ برابر صفر شود، لذا $r=0$ بوده و در این حالت می‌گوییم $p(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است و در این حالت داریم:

$$p(x)=(x-a)q(x)$$

نتیجه‌ی ۲: اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای و $g(x)=ax+b$ (مقسوم علیه) باشند، باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $p(-\frac{b}{a})$، زیرا:

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a} \Rightarrow r=p(-\frac{b}{a})$$

مثال آموزشی

● **باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^3-3x^2+2$ را بر $x-2$ به دست آورید.**

حل: کافی است ریشه‌ی $x-2$ را به دست آورده و در $p(x)$ قرار دهیم: $x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad r=p(2)=(2)^3-3(2)^2+2=8-12+2=-2$

● **مقدار a را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=4x^2-ax+2$ بر $(2x-1)$ بخش‌پذیر باشد.**

حل:

$$\text{شرط بخش‌پذیری}: 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow r=p(\frac{1}{2})=0$$

$$p(\frac{1}{2})=4(\frac{1}{2})^2-a(\frac{1}{2})+2=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{2}a+2=0 \Rightarrow 1+2=\frac{1}{2}a \Rightarrow a=6$$

● **هرگاه باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)=2x^4-3ax^2+ax-1$ بر $(x+1)$ برابر -3 باشد، آن‌گاه باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.**

حل:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow r=p(-1)=-3 \qquad (1)$$

$$p(-1)=2(-1)^4-3a(-1)^2+a(-1)-1=2-3a-a-1=1-4a \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 1-4a=-3 \Rightarrow -4a=-4 \Rightarrow a=1 \Rightarrow p(x)=2x^4-3x^2+x-1$$

حال برای محاسبه‌ی باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ داریم:

$$r=p(2)=2(2)^4-3(2)^2+2-1=32-12+2-1=21$$

تست نمونه

● **اگر عبارت x^3+ax^2+bx-2 بر $x-2$ بخش‌پذیر بوده و باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۷ باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۱۲ ۳) ‎-۱۱ ۴) ‎-۱۲

حل: با فرض $p(x)=x^3+ax^2+bx-2$ داریم:

$$\begin{cases} p(2)=0 \Rightarrow 8+4a+2b-2=0 \Rightarrow 4a+2b=-6 \\ p(1)=7 \Rightarrow 1+a+b-2=7 \Rightarrow a+b=8 \end{cases}$$

حال این دو رابطه را در یک دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{l} \\ (-2)\times \end{array}\begin{cases} 4a+2b=-6 \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+\cancel{2b}=-6 \\ -2a-\cancel{2b}=-16 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} 2a=-22 \Rightarrow a=-11$$

● **اگر باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر $x-5$ برابر ۱۰ باشد، آن‌گاه باقیمانده‌ی تقسیم $p(x^2+1)$ بر $x-2$ برابر کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۵

حل: طبق قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$p(x)=(x-5)q(x)+r \Rightarrow r=p(5)=10$$

حال قضیه‌ی تقسیم را برای $p(x^2+1)$ با مقسوم‌علیه $(x-2)$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x^2+1)=(x-2)Q(x)+R \xrightarrow{x=2} p(2^2+1)=(2-2)Q(2)+R \Rightarrow p(5)=R \Rightarrow R=10$$

نکته‌ی ۲ (مهم): هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$ به ازای $x=a$ برابر صفر شود، نتیجه می‌گیریم که $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. در این حالت می‌گوییم $(x-a)$ یک فاکتور و یا یک عامل برای $P(x)$ است. برای پیدا کردن فاکتورهای دیگر $P(x)$، کافی است $P(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم.

مثال آموزشی

● **نشان دهید که $(2x+1)$ یک فاکتور برای $f(x)=2x^3-7x^2+2x+3$ است، سپس فاکتورهای دیگر $f(x)$ را به دست آورید.**

حل: اگر $(2x+1)$ یک فاکتور $f(x)$ باشد، پس باید $f(x)$ بر $(2x+1)$ بخش‌پذیر باشد. یعنی:

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(-\frac{1}{2})=0$$

$$f(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^3-7(-\frac{1}{2})^2+2(-\frac{1}{2})+3=\frac{-2}{8}-\frac{7}{4}-1+3=\frac{-2-14}{8}+2=-2+2=0$$

چون باقیمانده صفر شد، لذا $f(x)$ بر $(2x+1)$ بخش‌پذیر است. با تقسیم $f(x)$ بر $(2x+1)$ که اطمینان داریم باقیمانده‌ی آن صفر است، خواهیم داشت:

$$f(x)=2x^3-7x^2+2x+3=(2x+1)(x^2-4x+3) \qquad x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

پس فاکتورهای دیگر $f(x)$ عبارتند از: $(x-1)$ و $(x-3)$

نتیجه: از مهم‌ترین کاربردهای نکته‌ی (۲) محاسبه‌ی تعداد ریشه‌های یک معادله است.

مثال آموزشی

● نشان دهید که منحنی تابع $f(x)=۴x^۳-۱۳x-۶$ محور xها را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ قطع می‌کند و نقاط دیگر تقاطع این منحنی با محور xها (ریشه‌های دیگر معادله) را بیابید.

حل: با توجه به فرض $y=۴x^۳-۱۳x-۶$ و اینکه محل تلاقی یک منحنی با محور xها نقاطی است که عرض آن نقاط صفر است، پس اگر نقطه‌ای به طول $x=۲$ محل تلاقی تابع با محور xها باشد، باید $f(۲)=۰$ باشد که داریم: $f(۲)=۴(۲)^۳-۱۳\times۲-۶=۳۲-۲۶-۶=۰$

حال می‌توان گفت که $(x-۲)$ یک فاکتور برای $f(x)$ است، یعنی $f(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. با تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$ خارج قسمت را پیدا کرده و سپس آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا دیگر نقاط تلاقی تابع f با محور xها (ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$) به دست آید.

عبارت $(۴x^۲+۸x+۳)$ از تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$ به دست آمده است. (تقسیم به عهده‌ی خودتان) $f(x)=۴x^۳-۱۳x-۶=(x-۲)(۴x^۲+۸x+۳)\to$

$f(x)=۰\Rightarrow x-۲=۰$ یا $۴x^۲+۸x+۳=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶$

$$x=\frac{-۸\pm۴}{۲\times۴}\Rightarrow x=\frac{-۱۲}{۸}=\frac{-۳}{۲}\ ,\ x=\frac{-۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$$

اشتباهات متداول در بین برخی از دانش‌آموزان:

در طی بیش از ۲۰ سال تدریس در دروس مختلف ریاضی، با صحنه‌هایی روبه‌رو شده‌ایم که گاهی باعث تأسف و گاهی هم باعث شده که از این شیرین‌کاری‌ها مسرور و گاهی هم شاخ درآوریم. حال تا آن‌جایی که ذهن یاری می‌کند سعی می‌کنیم این موارد را در اینجا ذکر کنیم تا دیگر شما از این حرکت‌ها انجام ندهید:

۱ در محاسبات ریاضی، توان بر ضرب و تقسیم، ضرب و تقسیم بر جمع و منها تقدم دارد. حال چند نمونه از این شیرین‌کاری‌ها را ببینیم:

$$\begin{cases}۲^۳+۲^۵=۲^۸\to \text{اشتباه}\\ ۲^۳+۲^۵=۸+۳۲=۴۰\to \text{درست}\end{cases}\quad \begin{cases}۳\times۲^۴=۶^۴\to \text{اشتباه}\\ ۳\times۲^۴=۳\times۱۶=۴۸\to \text{درست}\end{cases}\quad \begin{cases}۱۳-۸\times۲=۵\times۲=۱۰\to \text{اشتباه}\\ ۱۳-۸\times۲=۱۳-۱۶=-۳\to \text{درست}\end{cases}$$

توجه: جواب ۳×۲^۴ موقعی $۶^۴$ می‌شود که ۳×۲ داخل پرانتز باشد، یعنی: $(۳\times۲)^۴=۶^۴$

۲ اگر بین دو کسر علامت منفی باشد، هنگامی که مخرج مشترک می‌گیرید، علامت منفی در کل صورت کسر ضرب می‌شود:

$$\begin{cases}\frac{x}{۲}-\frac{x-۱}{۳x}=\frac{۳x^۲-۲x-۲}{۶x}\to \text{اشتباه}\\ \frac{x}{۲}-\frac{x-۱}{۳x}=\frac{۳x^۲-۲(x-۱)}{۶x}=\frac{۳x^۲-۲x+۲}{۶x}\to \text{درست}\end{cases}$$

۳ در ساده کردن عبارت‌های جبری وقتی پرانتزی دارای ضریب یا منفی است، معمولاً دوستان علامت منفی یا ضریب را فقط در عبارت اولی داخل پرانتز ضرب می‌کنند.

$$\begin{cases}۳x-۲(x+۱)=۳x-۲x+۱\to \text{اشتباه}\\ ۳x-۲(x+۱)=۳x-۲x-۲\to \text{درست}\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲x-(۴-x)=۲x-۴-x\to \text{اشتباه}\\ ۲x-(۴-x)=۲x-۴+x\to \text{درست}\end{cases}$$

۴ یادتان باشد که هرموقع خواستید یک عبارت دوجمله‌ای را به توان ۲ برسانید از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنید، نه اینکه تک‌تک عبارت‌ها را به توان دو برسانید.

$$\begin{cases}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲=a+b\to \text{اشتباه}\\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲=(\sqrt{a})^۲+(\sqrt{b})^۲+۲\sqrt{a}\times\sqrt{b}=a+b+۲\sqrt{ab}\end{cases}$$

۵ وقتی در زیر رادیکال بین دو عبارت جمع و یا منها است، نمی‌توان از تک‌تک عبارت‌ها جذر گرفت. دقت کنید که باید حتماً بین عامل‌ها علامت ضرب یا تقسیم باشد.

$$\begin{cases}\sqrt{a^۲+b^۲}=a+b\to \text{اشتباه}\\ \sqrt{۴x^۲}=\sqrt{۴}\times\sqrt{x^۲}=۲|x|\end{cases}$$

۶ در محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو زاویه، نمی‌توان برای تک‌تک زوایا نسبت مثلثاتی مربوطه را نوشت، مثلاً:

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\to \text{اشتباه}\\ \cos x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\cos۲x=\frac{۲}{۳}\to \text{اشتباه}\end{cases}$$

$\to$ یعنی اگر زاویه را n برابر کنیم، نسبت‌های مثلثاتی n برابر نمی‌شوند.

۷ همگی می‌دانیم که مشتق x^n برابر $nx^{n-۱}$ است، ولی مشتق ۲^x که این جوری نیست: اشتباه

$$\begin{cases}y=۲^x\Rightarrow y'=x\times۲^{x-۱}\to \text{اشتباه}\\ y=۲^x\Rightarrow y'=۲^x\ln۲\end{cases}$$

۸ در حل معادلات حق نداریم دوطرف معادله را بر یک عبارت جبری تقسیم کنیم:

$$\begin{cases}x^۲\cancel{(x+۲)}=\cancel{(x+۲)}\Rightarrow x^۲=۱\to \text{اشتباه}\\ x^۲(x+۲)=(x+۲)\Rightarrow x^۲(x+۲)-(x+۲)=۰\Rightarrow(x+۲)(x^۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۰\\ x^۲-۱=۰\end{cases}\end{cases}$$

۹ این شیرین‌کاری را هم در حل معادلات ببینید:

$$\begin{cases}x^۲+\cancel{x+۱}=\cancel{x+۱}\Rightarrow x^۲=۰\\ \cancel{(x^۲+۱)}x=\cancel{x^۲+۱}\Rightarrow x=۱\end{cases}\to \text{درست}\qquad \begin{cases}x^۲+\cancel{(x+۱)}=\cancel{x+۱}\Rightarrow x^۲=۱\\ \cancel{(x^۲+۱)}x=\cancel{(x^۲+۱)}\Rightarrow x=۰\end{cases}\to \text{اشتباه}$$

توجه: اگر فکر می‌کنید موارد بالایی درست نیست، طرف دوم را به طرف اول منتقل کنید تا به درستی آن پی ببرید. وقتی دو عبارت در دو طرف تساوی با علامت جمع است و آن دو را حذف می‌کنیم بدان معنی است که هر دو طرف را داریم از آن عبارت کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+\cancel{2}=\cancel{2} \Rightarrow x=1 \rightarrow \text{اشتباه} \\ x+2=2 \Rightarrow x+2-2=0 \Rightarrow x=0 \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

۱۰ در رادیکال‌ها با فرجه‌ی زوج، حاصل رادیکال همواره مقداری نامنفی است. این شیرین‌کاری را هم ببینید: $\sqrt{9}=\pm 3$

۱۱ موقعی که از دو طرف یک تساوی جذر می‌گیریم، می‌بایست علامت مثبت و منفی را قرار دهیم: $x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

۱۲ در عبارت‌های گویا وقتی می‌توانید کسر را تفکیک کنید که در مخرج کسر فقط یک عبارت باشد، به مثال زیر توجه کنید: پس تفکیک کسر از مخرج، صحیح نمی‌باشد.

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c} \rightarrow \text{درست} \\ \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c} \rightarrow \text{اشتباه} \end{cases}$$

۱۳ برخی دوستان هم عادت دارند در عبارت‌های کسری، هرچی در صورت و مخرج مثل هم است را باهم حذف کنند، ولی دقت داشته باشید که شما موقعی می‌توانید یک عبارت از صورت با یک عبارت از مخرج را باهم ساده کنید که بین همه‌ی عامل‌ها، ضرب وجود داشته باشد.

$$\begin{cases} \dfrac{\cancel{x^2}+x+1}{\cancel{x^2}+4}=\dfrac{x+1}{4} \rightarrow \text{اشتباه} \\ \dfrac{\cancel{x}(x+1)-2}{\cancel{x}}=x+1-2=x-1 \rightarrow \text{اشتباه} \\ \dfrac{x\,\cancel{(x+1)}\,(x-2)}{\cancel{x+1}}=x(x-2) \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

۱۴ در بحث مشتق همواره می‌دانیم که مشتق $\sqrt{x}$ برابر $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ است. بنابراین برخی از دوستان هرموقع از رادیکال مشتق می‌گیرند می‌نویسند $\dfrac{1}{2\sqrt{\ }}$، در حالی‌که فقط مشتق $\sqrt{x}$ می‌شود $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. به برخی از این موارد توجه کنید:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+1} \rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \text{اشتباه} \\ y=\sqrt{x^2+1} \rightarrow y'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x} \rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} \rightarrow \text{اشتباه} \\ y=\sqrt{1-x} \rightarrow y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

۱۵ برای حل نامعادله باید همه‌ی عبارت‌ها را به یک طرف نامساوی برده تا نامساوی به فرم $f(x)\geq 0$ یا $f(x)\leq 0$ تبدیل شود و سپس فقط به کمک تعیین علامت، مجموعه جواب نامعادله را به دست آوریم. حال برخی از شیرین‌کاری‌های دوستانتان را ببینید:

- برخی مثل معادله عمل کرده و برای پیدا کردن جواب نامعادله، طرفین وسطین می‌کنند. $\dfrac{3x-2}{x+1}>1 \Rightarrow 3x-2>x+1 \rightarrow$ اشتباه
- بعضی از دوستان هم، مثلاً وقتی به نامعادله‌ی $f(x)\geq 0$ می‌رسند، همه را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهند.

$$\dfrac{2x-1}{x+3}>0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \rightarrow \text{اشتباه}$$

۱۶ در حل معادلات؛ موقعی که ضرب چند عبارت برابر صفر است فقط می‌توانیم بگوییم یا عبارت اولی صفر یا عبارت دومی و یا .... ولی برخی در حل معادلات به این صورت عمل می‌کنند:

$$x^3-2x-1=0 \Rightarrow x^3-2x=1 \Rightarrow x(x^2-2)=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2=1 \end{cases} \rightarrow \text{اشتباه}$$

باید به این دوستان گفت اگر ضرب دو عدد یک باشد باید نتیجه گرفت که آیا هر دو حتماً یک است، یعنی مثلاً نمی‌تواند یکی ۲ و دیگری $\dfrac{1}{2}$ باشد.

۱۷ در محاسبه‌ی مشتق توابع، برخی دوستان کلاً فرمول‌های مشتق را فراموش می‌کنند. از بارزترین موارد می‌توان به مشتق حاصل‌ضرب اشاره کرد، به عنوان مثال:

$$\begin{cases} y=\tan x \rightarrow y'=\cot x \rightarrow \text{اشتباه} \\ y=\sin^2 x \rightarrow y'=2\sin x \rightarrow \text{اشتباه} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x^2\sin x \Rightarrow y'=2x\cos x \rightarrow \text{اشتباه} \\ y=x^2\sin x \Rightarrow y'=2x\sin x+x^2\cos x \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

۱۸ در محاسبه‌ی حد توابع به کمک هم‌ارزی، اکثر بچه‌ها وقتی در تابع داده شده $\sin x$ را می‌بینند به جای آن x قرار می‌دهند. باید به این دوستان گفت که در توابع مثلثاتی وقتی می‌توان از هم‌ارزی استفاده کرد که کمان آن نسبت مثلثاتی به سمت صفر میل کرده باشد، مثلاً

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\times\dfrac{1}{x}=1 \rightarrow \text{اشتباه} \\ \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0\times\sin(\dfrac{1}{0})=0\times\sin\infty=0\times(\text{عددی بین } -1,1)=0 \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

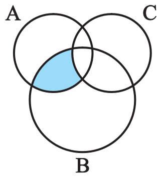
۱۹ وقتی در صورت و مخرج کسری اعداد اعشاری داریم، باید تعداد اعشارها با هم برابر باشند تا بتوانیم اعشار را حذف کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{0/2}{0/17}=\dfrac{2}{17} \rightarrow \text{اشتباه} \\ \dfrac{0/2}{0/17}=\dfrac{0/20}{0/17}=\dfrac{20}{17} \rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

۲۰ موارد دیگر را شما بنویسید و برای ما هم ارسال کنید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ایستگاه ۱ مجموعه‌ها



۱- قسمت هاشورزده شکل مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟

۱) $A-(B\cap C)$
۲) $A\cap(C-B)$
۳) $A\cap(B-C)$
۴) $(A\cap C)-B$

۲- مجموعه‌ی C به گونه‌ای است که هم $A\subset C$ و هم $B\subset C$، کدام نتیجه درست است؟

۱) $C=A\cup B$ ۲) $C\subset A\cup B$ ۳) $A\cup B\subset C$ ۴) $B\subset A\cap C$

ایستگاه ۲ توان و قوانین مربوط به آن

۳- عدد $(\frac{۱}{۶۴})^{-۱۲}$ را به صورت عدد ۲^m نوشته‌ایم. m کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۴- حاصل عبارت $۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۹^{\frac{۴}{۳}}\times(۲۷)^{-۱}$، با کدام یک از مقادیر زیر برابر است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵- حاصل عبارت $(\sqrt{۲})^{-۴}\times(۲-۲^{-۲})^{-۱}\div(۱۶)^{-۰/۷۵}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱۶}{۷}$ ۴) $\frac{۸}{۷}$

ایستگاه ۳ اتحادهای جبری و تجزیه

۶- کدام مقدار A، عبارت $۹x^۲y^۲+x^۴+A$ را به صورت توان دوم یک دوجمله‌ای در می‌آورد؟

۱) $-۳x^۳y$ ۲) $-۶x^۳y$ ۳) $۳x^۳y^۲$ ۴) $۶x^۳y^۲$

۷- اگر عبارت $۵x^۲+mx+۱۰$ به صورت توان دوم مجموع دوجمله باشد، m کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۸- اگر $x=\sqrt{۲}+۱$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲-۲x+۱}$ کدام است؟

۱) $۳-۲\sqrt{۲}$ ۲) $۶+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۶-۲\sqrt{۲}$

۹- مستطیلی دارای مساحت $۸x^۳-۱$ و عرض $۲x-۱$ می‌باشد، محیط آن کدام است؟

۱) $۸x^۲+۸x$ ۲) $۴x^۲+۲x+۱$ ۳) $۴x^۲+۴x$ ۴) $۸x^۲+۴x+۲$

۱۰- عامل نادرست از تجزیه‌ی $۱-a^۶$ کدام است؟

۱) $۱+a$ ۲) $۱-a^۲+a^۴$ ۳) $۱-a$ ۴) $۱+a^۲+a^۴$

۱۱- در تجزیه‌ی عبارت $a^۲(۱-x)+(b^۲+c^۲+۲bc)(x-۱)$ کدام عامل وجود ندارد؟

۱) $a+b-c$ ۲) $a+b+c$ ۳) $b+c-a$ ۴) $x-۱$

۱۲- اگر $c-d=-۷$ و $c^۲-d^۲=۷۷$ باشد، آن‌گاه مقدار $(c+d)^۲$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۴۴

۱۳- حاصل عبارت $(xy-۱)(x^۲y^۲+xy+۱)$ به ازای $x=\sqrt[۳]{۲}$ و $y=\sqrt[۳]{۴}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۷ ۳) ۹ ۴) ۷

۱۴- اگر $۲a^۲+۴b^۲-۴ab-۲a+۱=۰$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵- اگر $x^۲+۴y^۲=۴xy$ باشد، آن‌گاه مقدار $x^۲-۴y^۲$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) صفر

۱۶- اگر $a^۲+b^۲+c^۲+۳=۲(a+b+c)$، آن‌گاه مقدار c چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷- اگر $\begin{cases}x+y=۱۳\\x^۲+y^۲=۹۷\end{cases}$، آن‌گاه مقدار $|x-y|$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱۵

۱۸- از رابطه‌ی $(a-2b)^2+(b-2c)^2=0$، مقدار $\frac{(b+c-a)^3}{abc}$ کدام است؟

۱) -8 ۲) 8 ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۹- حاصل عبارت $\frac{4x^2-8xy}{x^2+3x} \div \frac{4x^2-16y^2}{x^3+x^2-6x}$ کدام است؟

۱) $\frac{x-2y}{x^2+3x}$ ۲) $\frac{x+2y}{x^2+3x}$ ۳) $\frac{x-2y}{x^2-2x}$ ۴) $\frac{x+2y}{x^2-2x}$

ایستگاه ۴ ب.م.م و ک.م.م

۲۰- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۲۴ و ۳۶ چند واحد از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها بیشتر است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۶۰

۲۱- تجزیه‌ی استاندارد عدد ۱۵۰۰ به شکل $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ است. $\alpha+\beta+\gamma$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

۲۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد ۷۸، ۲۳۴ و ۱۵۶ یک عدد دو رقمی است. مجموع رقم‌های این عدد چیست؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۴ ۴) ۱۸

۲۳- اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $a=2^{k-1}\times 3^2\times 5^{k-1}$ و $b=2^{2k^2-4}\times 3\times 5^{k+1}$، برابر با ۳۰۰ باشد، مقدار k کدام است؟ $(k\in\mathbb{N})$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۴- عامل مشترک بین دو عبارت $x^2-2xy-15y^2$ و $x^2+7xy+12y^2$ کدام است؟

۱) $x+3y$ ۲) $x+2y$ ۳) $x-2y$ ۴) $x+4y$

۲۵- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت x^3-x^2-x+1 و x^3+x^2-x-1 کدام است؟

۱) $(x+1)^2(x-1)^2$ ۲) $(x+1)^3(x-1)$ ۳) $(x-1)^3(x+1)$ ۴) $(x^2-1)(x^2+1)$

۲۶- اگر $(x^2-1)^2$ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $P(x)=x^3+x^2-x-1$ و $Q(x)=x^3+ax^2-x+1$ باشد، عدد a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۲۷- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای x^2+6x+8 و x^2-2x-8 را به بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها تقسیم کرده‌ایم. حاصل تقسیم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱) x^2-9 ۲) x^2+9 ۳) x^2-16 ۴) x^2+16

۲۸- می‌خواهیم مستطیلی به ابعاد ۴۸ و ۳۶ سانتی‌متر را با کاغذهای مربع شکل یکسان که اندازه‌ی ضلع آن‌ها عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ باشد، بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع مربع چند عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۲۹- اگر $\frac{C}{x-1}+\frac{Ax+B}{x^2+1}=\frac{x+2}{(x^2+1)(x-1)}$ باشد، $A+B+C$ کدام است؟ $(A,C\neq 0)$

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰- اگر $\frac{C}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{A}{x}=\frac{2x+3}{x(x^2-1)}$ باشد، آن‌گاه A کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

ایستگاه ۵ رادیکال و قوانین مربوط به آن

۳۱- حاصل $\sqrt{48}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) ۵ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) ۷

۳۲- حاصل $\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}$ برابر کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) -2 ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۳۳- حاصل $\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-1$ ۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

۳۴- حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^n\sqrt{a^n}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{a^{2n}}$ ۲) $\sqrt[3]{a^n}$ ۳) $\sqrt{a^n}$ ۴) $\sqrt[3]{a^{2n}}$

۳۵- اگر $x=1-\sqrt{2}$ باشد، حاصل $(x+x^{-1})^{\frac{1}{3}}$ چقدر است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) ۱- ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) ۱

۳۶- اگر $x<0$ باشد، حاصل $\sqrt[4]{x^4}+2\sqrt[3]{x^3}$ کدام است؟

۱) $3x$ ۲) x ۳) $-x$ ۴) $-3x$

۳۷- حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{4}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۸- حاصل کسر $\frac{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x^4}}$ برابر است با: $(x\neq 0)$

۱) $|x|$ ۲) x ۳) $-x$ ۴) $-|x|$

۳۹- اگر $x=\sqrt[13]{2^{15}}$ باشد، حاصل $x\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2}}$ برابر است با:

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۰- حاصل عبارت $\sqrt{(-5)^2}-\sqrt[3]{-125}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۱۰- ۴) هیچ‌کدام

۴۱- حاصل عبارت $\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $\sqrt{2}$

۴۲- اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\times(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}(\sqrt{3}-2)^{\frac{3}{2}}$، به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، A کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۳)

۱) $\sqrt{3}-1$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{3}+1$

۴۳- حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}.(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

ایستگاه ۶ بخش‌پذیری

۴۴- اگر چندجمله‌ای $P(x)=5x^2-2x^3-x+4$ را بر $B(x)=2x-3$ تقسیم کنیم، مقدار خارج قسمت به ازای $x=-1$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۳-

۴۵- در تقسیم عبارت $(x-2)^2(x+2)+x^3$ بر x^2-4 خارج قسمت کدام است؟

۱) x^2-2x ۲) $x-2$ ۳) $2x-2$ ۴) $2x-4$

۴۶- مقدار m کدام باشد تا چندجمله‌ای $P(x)=x^3-mx^2-x+4$ بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۳/۵ ۲) ۱۳/۵- ۳) ۱۷/۵ ۴) ۱۷/۵-

۴۷- m و n کدام باشند تا چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد؟

۱) $m=-2, n=12$ ۲) $m=-8, n=24$ ۳) $m=2, n=4$ ۴) $m=1, n=6$

۴۸- اگر $x-2$ یک فاکتور (عامل) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ باشد، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۶- ۴) ۲-

۴۹- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد، مجموع دو جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۱-

۵۰- دو چندجمله‌ای $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=x^3+2kx-5$ در تقسیم بر $x-2$ هم باقیمانده هستند، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۵۱- اگر باقیمانده‌ی تقسیم عبارت $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ بر $x-1$ و $x+1$ به‌ترتیب ۴ و ۶ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۵۲- به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

آزمون جامع (۱) ۲۰ دقیقه

۱- اگر $a-b=1$ و $a^2+b^2=5$ باشد، مقدار a^3-b^3 چه عددی است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۶

۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک x^3-4x و $(x(x+2))^2$ کدام است؟

۱) x^2+2x ۲) x^3-4x ۳) x^3+4x^2+4x ۴) $(x-2)(x(x+2))^2$

۳- تفاضل عدد یک از مجذور هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، برابر حاصل‌ضرب چیست؟

۱) دو عدد فرد متوالی ۲) دو عدد متوالی ۳) دو عدد زوج متوالی ۴) موارد ۱ یا ۳

۴- عدد $(\frac{1}{128})^{-12}$ را به صورت عدد 2^m نوشته‌ایم. m کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۸۴

۵- در چندجمله‌ای $P(x)=x^{3}+ax^{2}+x+b$ مقدار $\frac{a}{b}$ کدام باشد تا باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ بوده و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) -4 ۲) 4 ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۶- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $x^{2}+6x+8$ و $x^{2}-2x-8$ را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها تقسیم کرده‌ایم. حاصل تقسیم کدام است؟

۱) $x^{2}-9$ ۲) $x^{2}+9$ ۳) $x^{2}-16$ ۴) $x^{2}+16$

۷- ساده شده‌ی عبارت $\frac{6^{7}}{8^{5}}\times\frac{2^{3}\times3^{-2}}{2^{-5}\times3^{4}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 2 ۳) 3 ۴) 6

۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{27}}-\frac{1}{3-\sqrt{6}}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۹- حاصل عبارت $(a+b)^{2}+(b+c)^{2}+(a+c)^{2}-(a+b+c)^{2}$ برابر است با:

۱) $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ ۲) $ab+bc+ac$ ۳) $(a+b+c)^{2}$ ۴) $2(ab+bc+ac)$

۱۰- اگر $x+y=7$ و $xy=5$ باشد، حاصل $x^{3}+y^{3}$ کدام است؟

۱) 216 ۲) 238 ۳) 244 ۴) 264

آزمون جامع (۲) — ۲۰ دقیقه

۱- جذر $(2-\sqrt{3})^{3}(2+\sqrt{3})^{2}(2+\sqrt{3})$ برابر است با:

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}+1$ ۳) $2+\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}-1$

۲- حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) $\sqrt{3}$

۳- کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت $x^{2}-1$ و $x^{2}+x$ کدام است؟

۱) $x^{2}-x$ ۲) $2x^{2}+x-1$ ۳) $x^{3}-x$ ۴) $x^{4}+x^{3}-x^{2}-x$

۴- عبارت $x^{5}-x^{4}-4x+4$ بر «کدام چندجمله‌ای»، بخش‌پذیر نیست؟

۱) $x^{2}-2$ ۲) $x+1$ ۳) $x^{2}+2$ ۴) $x-1$

۵- عبارت $m^{4}-m^{3}n+mn^{3}-n^{4}$ بر «کدام چندجمله‌ای»، بخش‌پذیر است؟

۱) $(m+n)^{2}$ ۲) $m^{2}-mn+n^{2}$ ۳) $(m-n)^{2}$ ۴) $m^{2}+mn+n^{2}$

۶- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عبارت $3(x^{2}+x-2)$ و $(6x^{2}-24)(x+1)$ کدام است؟

۱) $3x-6$ ۲) $3x-3$ ۳) $3x+3$ ۴) $3x+6$

۷- شرط برقراری $(a+b+c)^{2}=(a+b)^{2}+(a+c)^{2}$ چیست؟

۱) $a^{2}=2bc$ ۲) $b^{2}=2ac$ ۳) $c^{2}=2ab$ ۴) $a+b+c=abc$

۸- حاصل عبارت $(x^{2}+xy+y^{2})(x^{2}-xy+y^{2})$ برابر است با:

۱) $x^{4}+y^{4}$ ۲) $x^{4}-x^{2}y^{2}+y^{4}$ ۳) $(x^{2}-y^{2})^{2}$ ۴) $x^{4}+x^{2}y^{2}+y^{4}$

۹- معکوس $3-2\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}+3$ ۲) $2-3\sqrt{2}$ ۳) $2+3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}-3$

۱۰- حاصل $(1-\sqrt{20})(1+4\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})}$ کدام است؟

۱) -45 ۲) -44 ۳) -36 ۴) -34

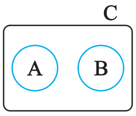
یادداشت:

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

۱. گزینه (۳)

۲. گزینه (۳)

با توجه به فرضیات سؤال شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



با توجه به شکل جواب صحیح گزینه‌ی (۳) می‌باشد.

۳. گزینه (۴) $(\frac{1}{64})^{-12} = (64)^{12} = (2^6)^{12} = 2^{72} \Rightarrow m = 72$

۴. گزینه (۳)

$$(27)^{-1}\times 9^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{-1}(3^2)^{\frac{4}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{-3}\times 3^{\frac{8}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}} = 3^0 = 1$$

۵. گزینه (۴)

$$(\sqrt{2})^{-4}\times(2-2^{-2})^{-1}\div(16)^{-0.75}$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^4\times(2-\frac{1}{4})^{-1}\div(2^4)^{-0.75}$$
$$=\frac{1}{4}\times(\frac{7}{4})^{-1}\div 2^{-3} = \frac{1}{4}\times\frac{4}{7}\div\frac{1}{8}=\frac{8}{7}$$

نکته: $(a^m)^n = a^{m\times n}$

۶. گزینه (۲)

$$9x^2y^2+x^4+A=(3xy)^2+(x^2)^2\pm\underbrace{2(3xy)(x^2)}_{A}=(3xy\pm x^2)^2$$
$$\Rightarrow A=\pm2\times3xy\times x^2=\pm6x^3y$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۷. گزینه (۳)

$$5x^2+mx+10=(\sqrt{5}x)^2+mx+(\sqrt{10})^2$$

$\Rightarrow mx =$ دو برابر جمله‌ی اول در جمله‌ی دوم

$$=2(\sqrt{5}x)(\sqrt{10})=2\sqrt{50}x=2\sqrt{25\times2}x=10\sqrt{2}x\Rightarrow m=10\sqrt{2}$$

۸. گزینه (۳)

ابتدا صورت و مخرج را به صورت اتحاد نوشته، تا محاسبات سریع‌تر انجام گیرد:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{(\sqrt{2}+1+1)^2}{(\sqrt{2}+1-1)^2}=\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{2}$$
$$=\frac{2+4+4\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{2}$$

۹. گزینه (۱)

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، چندجمله‌ای طول (b) را می‌یابیم:

$$S=ab\Rightarrow 8x^3-1=(\underbrace{2x-1}_{a})(\underbrace{4x^2+2x+1}_{b})$$

$\Rightarrow$ محیط $=2(2x-1+4x^2+2x+1)=8x^2+8x$

۱۰. گزینه (۲)

$$(1-a^6)=(1-a^2)(1+a^2+a^4)=(1-a)(1+a)(1+a^2+a^4)$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی (۲) در تجزیه‌ی $(1-a^6)$ وجود ندارد.

۱۱. گزینه (۱)

با تجزیه‌ی عبارت داده شده به عوامل اول خواهیم داشت:

$$a^2(1-x)+(b^2+c^2+2bc)(x-1)=a^2(1-x)-(b+c)^2(1-x)$$
$$=(1-x)[a^2-(b+c)^2]=(1-x)[(a-b-c)(a+b+c)]$$
$$=(x-1)[(b+c-a)(a+b+c)]$$

پس فقط عبارت $a+b-c$ وجود ندارد.

۱۲. گزینه (۳)

با توجه به اتحاد مزدوج عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(c-d)(d+c)=77\xrightarrow{c-d=-7}d+c=-11\Rightarrow(d+c)^2=121$$

۱۳. گزینه (۴)

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(xy-1)(x^2y^2+xy+1)=(xy)^3-1=x^3y^3-1=2\times4-1=7$$

۱۴. گزینه (۲)

عبارت را به صورت جمع دو مربع کامل می‌نویسیم:

$$a^2+a^2+4b^2-4ab-2a+1=0$$
$$\Rightarrow(a^2+4b^2-4ab)+(a^2-2a+1)=0\Rightarrow(a-2b)^2+(a-1)^2=0$$

چون حاصل جمع دو مربع کامل صفر است، پس هر کدام باید صفر باشد:

$$\begin{cases}a-2b=0\\a-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\a=1\end{cases}\Rightarrow b=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{3}{2}$$

۱۵. گزینه (۴)

$$x^2-4xy+4y^2=0\xrightarrow{\text{طبق اتحاد مربع دوجمله‌ای}}(x-2y)^2=0$$
$$\Rightarrow x=2y\Rightarrow x^2-4y^2=(2y)^2-4y^2=0$$

۱۶. گزینه (۲) عبارت را به صورت مجموع مربعات کامل می‌نویسیم:

$$a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$$
$$\Rightarrow(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)=0$$
$$\Rightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

مجموع سه عدد نامنفی وقتی صفر است که هر سه صفر باشند، پس: $a-1=0, b-1=0, c-1=0\Rightarrow a=1\ ,b=1\ ,c=1$

۱۷. گزینه (۲)

از آنجا که رابطه‌ی زیر به عنوان اتحاد همواره برقرار است، پس داریم:

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$$
$$\Rightarrow169+(x-y)^2=2\times97=194\Rightarrow(x-y)^2=194-169\Rightarrow|x-y|=5$$

۱۸. گزینه (۳)

چون مجموع مربعات دو مقدار برابر صفر است، پس هر کدام از آن‌ها صفر می‌باشند، یعنی:

$$\begin{cases}a-2b=0\\b-2c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\b=2c\end{cases}\Rightarrow a=4c$$

با جایگذاری داریم: $\frac{(b+c-a)^3}{abc}=\frac{(2c+c-4c)^3}{4c\times2c\times c}=\frac{-c^3}{8c^3}=-\frac{1}{8}$

۱۹. گزینه (۴)

با نوشتن وارون کسر دوم، تقسیم را به ضرب تبدیل و سپس چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{4x^2-16y^2}{x^3+x^2-6x}\times\frac{x^2+3x}{4x^2-8xy}=\frac{4(x-2y)(x+2y)}{x(x^2+x-6)}\times\frac{x(x+3)}{4x(x-2y)}$$
$$=\frac{x+2y}{x(x+3)(x-2)}\times(x+3)=\frac{x+2y}{x(x-2)}$$

۲۰. گزینه (۴)

$$\begin{matrix}24=2^3\times3\\36=2^2\times3^2\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{ب.م.م}=2^2\times3=12\\\text{ک.م.م}=2^3\times3^2=72\end{cases}\Rightarrow72-12=60$$

۲۱. گزینه (۱)

$$\begin{array}{r|l}1500&2\\750&2\\375&3\\125&5\\25&5\\5&5\\1&\end{array}$$

$$\Rightarrow1500=2\times2\times3\times5\times5\times5$$
$$=2^2\times3^1\times5^3$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=1\\\gamma=3\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=6$$