هایپر تست

پاسخ‌نامه تشریحی

پاسخنامه هایپر تست فصل اول

۱. گزینه‌ی «۲»

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\frac{\sigma^۲}{\bar{x}^۲}=\frac{۱۰}{۳۶}\quad(*)$$

چون داده‌ها اعداد طبیعی متوالی‌اند: $\bar{x}=\frac{n+۱}{۲}\quad(**)$

برای محاسبه‌ی $\sigma^۲$ هم داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲$$

$$\sigma^۲=\frac{\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}}{n}-(\frac{n+۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow\sigma^۲=\frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶}-\frac{(n+۱)^۲}{۴}$$

$$=\frac{(n+۱)(۴n+۲-۳n-۳)}{۱۲}$$

$$\Rightarrow\sigma^۲=\frac{(n^۲-۱)}{۱۲}\xrightarrow{(*),(**)}\frac{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}{\frac{(n+۱)^۲}{۴}}=\frac{۱۰}{۳۶}$$

$$\Rightarrow\frac{(n-۱)(n+۱)}{۳(n+۱)^۲}=\frac{۱۰}{۳۶}\Rightarrow\frac{n-۱}{۳(n+۱)}=\frac{۱۰}{۳۶}$$

$$\Rightarrow\frac{n-۱}{n+۱}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow۵n+۵=۶n-۶\Rightarrow n=۱۱$$

پس میانه برابر داده‌ی وسطه که برابر ۶ است.

۲. گزینه‌ی «۱»

$$CV=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{\sigma^۲}{\bar{x}^۲}=\frac{۴}{۹}\quad(*)$$

از طرفی با توجه به اینکه مجموع مجذور داده‌ها رو داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-(\frac{\sum x_i}{n})^۲=\frac{۱۳۰}{n}-\frac{۹۰۰}{n^۲}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{\frac{۱۳۰}{n}-\frac{۹۰۰}{n^۲}}{\frac{۹۰۰}{n^۲}}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{۱۳۰}{n}-\frac{۹۰۰}{n^۲}=\frac{۴۰۰}{n^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۳۰۰}{n^۲}=\frac{۱۳۰}{n}\Rightarrow n=۱۰$$

۳. گزینه‌ی «۴»

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{۱۲}+\sin\frac{۳\pi}{۱۲}+\sin\frac{۵\pi}{۱۲}+\sin\frac{۷\pi}{۱۲}+\sin\frac{۹\pi}{۱۲}+\sin\frac{۱۱\pi}{۱۲}}{۶}$$

می‌دونیم اگه مجموع کمان‌ها برابر π باشه، سینوس‌ها باهم برابرند.

$$\Rightarrow\bar{x}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۲}+۲\sin\frac{۳\pi}{۱۲}+۲\sin\frac{۵\pi}{۱۲}}{۶}$$

$$\Rightarrow\bar{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{۱۲}+\sin\frac{۵\pi}{۱۲}+\sin\frac{\pi}{۴}}{۳}$$

حالا از رابطه‌ی تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۴}}{۳}=\frac{\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۳}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۶}$$

برای محاسبه‌ی $\sigma^۲$ هم از رابطه‌ی مجموع مجذورات استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^۲=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{۷\pi}{۱۲}}{۶}+$$

$$\frac{\sin^۲\frac{۹\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{۱۱\pi}{۱۲}}{۶}-\bar{x}^۲$$

اگر از روابط کمان‌های $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ استفاده کنیم:

$$\Rightarrow\sigma^۲=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{\pi}{۴}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۲}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}}{۶}+$$

$$\frac{\cos^۲\frac{\pi}{۴}+\cos^۲\frac{۵\pi}{۱۲}}{۶}-\bar{x}^۲$$

$$\sigma^۲=\frac{۱+۱+۱}{۶}-(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۶})^۲$$

$$\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۳}{۶}-\frac{۸+۴\sqrt{۳}}{۳۶}=\frac{۱۸-۸-۴\sqrt{۳}}{۳۶}=\frac{۵-۲\sqrt{۳}}{۱۸}$$

۴. گزینه‌ی «۲»

اگر داده‌های دسته‌ی اول رو x و داده‌های دسته‌ی دوم رو y نامگذاری کنیم، داریم:

$$y=-x+۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_y^۲=(-۱)^۲\sigma_x^۲\Rightarrow\sigma_y^۲=\sigma_x^۲=۴\Rightarrow\sigma_y=۲\\ \bar{y}=-\bar{x}+۱\xrightarrow{\bar{x}=-۳}\bar{y}=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow CV_y=\frac{\sigma_y}{\bar{y}}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۵. گزینه‌ی «۳»

می‌دونیم $\sum(x_i-\bar{x})=۰$ بنابراین:

$$\sum(x_i-\bar{x})^۲-۷\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})}=۱۴۴\Rightarrow\sum(x_i-\bar{x})^۲-۰=۱۴۴$$

چون انحراف معیار برابر ۳ و واریانس ۹ است، داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}\Rightarrow۹=\frac{۱۴۴}{n}\Rightarrow n=۱۶$$

۶. گزینه‌ی «۴»

با توجه به نمودار، جدول مربوط به داده‌ها رو رسم می‌کنیم:

دسته‌ها	$[۱,۳)$	$[۳,۵)$	$[۵,۷]$
فراوانی	۳	۱	۳
مرکز دسته	۲	۴	۶

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{۶+۴+۱۸}{۷} = \frac{۲۸}{۷} = ۴$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۳(۲-۴)^۲ + ۱(۴-۴)^۲ + ۳(۶-۴)^۲}{۷}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۲۴}{۷} \simeq ۳/۴۲ \Rightarrow \sigma \simeq ۱/۸$$

۷. گزینه‌ی «۱»

چون پاره‌خط گذرنده از دو نقطه، موازی خط $y = \frac{x}{۲} + ۱$ است، بنابراین شیب پاره‌خط برابر $\frac{۱}{۲}$ است:

$$\text{شیب پاره‌خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۶-۴}{x_۲ - x_۱} \Rightarrow x_۲ - x_۱ = ۴$$

یعنی تفاضل طول‌ها (تفاضل دو مرکز دسته‌ی متوالی) برابر ۴ است.

در نتیجه: $\text{طول دسته} = ۴$

چون دامنه‌ی تغییرات ۲۸ است: $\text{تعداد دسته} = \frac{۲۸}{۴} = ۷$

چون برای رسم نمودار چندبر، نقاط ابتدایی و انتهایی را هم بـه مجموعـه‌ی نقاط اضافه می‌کنیم، نمودار از به هم وصل کردن ۹ نقطه پدید می‌آید.

۸. گزینه‌ی «۳»

مجموع زوایای مرکزی باید ۳۶۰° باشد:

$$۳۰ + ۴۵ + \alpha + ۱۶۵ + ۶۰ = ۳۶۰ \Rightarrow \alpha = ۶۰$$

از طرفی با توجه به فرمول زیر داریم:

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\alpha}{۳۶۰}$$

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی نسبی	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱۱}{۲۴}$	$\frac{۱}{۶}$

$$\bar{x} = \sum (\text{داده} \times \text{فراوانی نسبی})$$

$$= ۱ \times \frac{۱}{۱۲} + ۲ \times \frac{۱}{۸} + ۳ \times \frac{۱}{۶} + ۴ \times \frac{۱۱}{۲۴} + ۵ \times \frac{۱}{۶}$$

$$= \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۶} + \frac{۱۱}{۶} + \frac{۵}{۶}$$

$$= \frac{۱+۳+۶+۲۲+۱۰}{۱۲} = \frac{۴۲}{۱۲} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

پاسخنامه هایپر تست فصل دوم

۱. گزینه‌ی «۳»

از واسطه‌ی حسابی برای حل استفاده می‌کنیم:

$$\log_{۴}^{۴x-۳}=\frac{\log_{۲}^{۲x-۱}+\log_{۲}^{x}}{۲}\Rightarrow ۲\log_{۴}^{۴x-۳}=\log_{۲}^{۲x^{۲}-x}$$

$$\Rightarrow ۲\log_{۲^{۲}}^{۴x-۳}=\log_{۲}^{۲x^{۲}-x}\Rightarrow \log_{۲}^{۴x-۳}=\log_{۲}^{۲x^{۲}-x}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-x=۴x-۳\Rightarrow ۲x^{۲}-۵x+۳=۰\Rightarrow x=۱,\ x=\frac{۳}{۲}$$

با قرار دادن $x=۱$ هر سه جمله صفر می‌شوند. پس $x=\frac{۳}{۲}$ است.

۲. گزینه‌ی «۱»

برای محاسبه‌ی مجموع خواسته شده، خواهیم داشت:

(*) مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۵ + مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۲ $S=$

(مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۲و۵) ۲-

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{اعداد بخشپذیر بر ۲: }۲,۴,\ldots,۱۰۰\Rightarrow S_{۱}=\frac{۵۰}{۲}[۲+۱۰۰]=۲۵۵۰\\ \text{اعداد بخشپذیر بر ۵: }۵,۱۰,\ldots,۱۰۰\Rightarrow S_{۲}=\frac{۲۰}{۲}[۵+۱۰۰]=۱۰۵۰\\ \text{اعداد بخشپذیر بر ۱۰: }۱۰,۲۰,\ldots,۱۰۰\Rightarrow S_{۳}=\frac{۱۰}{۲}[۱۰+۱۰۰]=۵۵۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} S=S_{۱}+S_{۲}-۲(S_{۳})=۲۵۵۰+۱۰۵۰-۲(۵۵۰)\Rightarrow S=۲۵۰۰$$

۳. گزینه‌ی «۴»

$$a_{n}=\frac{۳^{n+۱}}{۵^{n}}-\frac{۴^{n}}{۵^{n}}=۳(\frac{۳}{۵})^{n}-(\frac{۴}{۵})^{n}$$

پس برای محاسبه‌ی حد مجموع جملات دنباله‌ی a_n، از حد مجموع هر یک از دنباله‌های به دست آمده استفاده می‌کنیم:

$$S=۳\left(\frac{\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}}\right)-\left(\frac{\frac{۴}{۵}}{۱-\frac{۴}{۵}}\right)=\frac{۹}{۲}-۴=\frac{۱}{۲}$$

۴. گزینه‌ی «۳»

جملات دنباله‌ی حسابی را به‌صورت $a,b,۱۰$ در نظر می‌گیریم.

پس: $b=\frac{a+۱۰}{۲}$

در نتیجه جملات به‌صورت $a\ ,\ \frac{a+۱۰}{۲}\ ,۱۰$ خواهند بود. به جمله‌ی سوم k واحد اضافه می‌کنیم. $a\ ,\ \frac{a+۱۰}{۲}\ ,۱۰+k$

چون این جملات تشکیل دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۳ می‌دهند:

$$(۱)\ \frac{\frac{a+۱۰}{۲}}{a}=۳\Rightarrow\frac{a+۱۰}{۲}=۳a\Rightarrow a=۲$$

$$(۲)\ \frac{۱۰+k}{\frac{a+۱۰}{۲}}=۳\xrightarrow{a=۲}\frac{۱۰+k}{۶}=۳\Rightarrow k=۸$$

۵. گزینه‌ی «۱»

جملات دنباله‌ی هندسی را به صورت a,b,c در نظر می‌گیریم

$b^{۲}=ac$ (*)

۸ واحد به جمله‌ی دوم اضافه می‌کنیم و دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌شود:

$$a,b+۸,c\Rightarrow b+۸=\frac{a+c}{۲}\ (**)$$

۶۴ واحد به جمله‌ی سوم اضافه می‌کنیم و دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهیم.

$$a,b+۸,c+۶۴\Rightarrow(b+۸)^{۲}=a(c+۶۴)$$

$$\Rightarrow b^{۲}+۱۶b+۶۴=ac+۶۴a$$

$$\xrightarrow{(*)} b^{۲}+۱۶b+۶۴=b^{۲}+۶۴a\Rightarrow b+۴=۴a\ \ (۱)$$

$$\xrightarrow{(**)}\frac{a+c}{۲}-۸+۴=۴a\Rightarrow\frac{a+c}{۲}-۴=۴a$$

$$\Rightarrow a+c-۸=۸a\Rightarrow c=۷a+۸\ \ (۲)$$

با قرار دادن (۱) و (۲) در (*):

$$(۴a-۴)^{۲}=a(۷a+۸)\Rightarrow ۱۶a^{۲}-۳۲a+۱۶=۷a^{۲}+۸a$$

$$۹a^{۲}-۴۰a+۱۶=۰\Rightarrow a=۴\ \text{یا}\ a=\frac{۴}{۹}$$

$a=۴$ اگر $\rightarrow$ جملات : ۴,۱۲,۳۶ صعودی

☑ غیریکنوا : $a=\frac{۴}{۹}$ اگر $\rightarrow$ جملات : $\frac{۴}{۹},\frac{-۲۰}{۹},\frac{۱۰۰}{۹}$

۶. گزینه‌ی «۲»

دنباله را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$۵(۱,۱۱,۱۱۱,\ldots)\Rightarrow۵(\frac{۱۰-۱}{۹},\frac{۱۰^{۲}-۱}{۹},\frac{۱۰^{۳}-۱}{۹},\cdots)$$

$$\Rightarrow S_{n}=۵(\frac{۱۰}{۹}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱۰^{۲}}{۹}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱۰^{۳}}{۹}-\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱۰^{n}}{۹}-\frac{۱}{۹})$$

$$\Rightarrow S_{n}=۵\left((\frac{۱۰}{۹}+\frac{۱۰^{۲}}{۹}+\cdots+\frac{۱۰^{n}}{۹})-(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱}{۹})\right)$$

$$\Rightarrow S_{n}=۵\left(\left(\frac{\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{n}-۱)}{۱۰-۱}\right)-\frac{n}{۹}\right)$$

$$\Rightarrow S_{n}=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{n}-۱)-n\right)$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۰}-۱)-۱۰\right)=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰^{۱۱}-۱۰}{۹}-۱۰\right)$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰^{۱۱}-۱۰۰}{۹}\right)=\frac{۵}{۸۱}(۱۰^{۱۱}-۱۰^{۲})$$

۷. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{S_{۵}}{S_{۸}}=\frac{۲۵}{۶۴}\Rightarrow\frac{\frac{۵}{۲}[۲a_{۱}+(۴)d]}{\frac{۸}{۲}[۲a_{۱}+(۷)d]}=\frac{۲۵}{۶۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۲a_{۱}+۴d}{۲a_{۱}+۷d}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۱۶a_{۱}+۳۲d=۱۰a_{۱}+۳۵d$$

$$\Rightarrow ۶a_{۱}=۳d\Rightarrow d=۲a_{۱}\ \ (*)$$

حالا نسبت جمله‌ی پنجم به هشتم را می‌یابیم:

$$\frac{a_{۵}}{a_{۸}}=\frac{a_{۱}+۴d}{a_{۱}+۷d}\overset{(*)}{=}\frac{a_{۱}+۸a_{۱}}{a_{۱}+۱۴a_{۱}}=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}$$