پاسخ هایپر تست‌های فصل ۱۰

اصلاحیه در سؤال ۱۲ ← کلید این سؤال گزینه‌ی «۳» است.

۱. گزینه‌ی (۳)

چون تابع در $x=۱$ خط مماس داره، پس در $x=۱$ پیوسته است. از طرفی چون مقدار خط مماس در $x=۱$ برابر $y=۳$ است پس حد هر ضابطه در $x=۱$ برابر ۳ است. و همچنین چون شیب خط مماس ۳ است، مقدار مشتق برابر ۳ است:

شرط پیوستگی: برای پیوستگی باید

$$a(۱)^۲+b(۱)+۱=۳\Rightarrow a+b=۲ \qquad (*)$$
$$c(۱)+d=۳\Rightarrow c+d=۳ \qquad (**)$$

از طرفی:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ax+b\xrightarrow{x=۱}۲a+b=۳\xrightarrow{(*)}a=۱\Rightarrow b=۱\\ c=۳\xrightarrow{(**)}d=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=۵$$

۲. گزینه‌ی (۳)

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f^۲(-۱-h)-f^۲(-۱)}{h}\overset{HOP}{=}\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲f(-۱-h)f'(-۱-h)}{۱}$$
$$=-۲f(-۱)f'_+(-۱) \quad (*)$$

با توجه به معادلات خطوط مماس، نقطه‌ی $(۱,۲)$ روی هر دو خط صدق می‌کند. پس: $f(۱)=۲$

چون f فرد است: $f(-۱)=-۲$

در نتیجه: $\text{حد}=-۲(-۲)f'_+(-۱)=۴f'_+(-۱) \quad (**)$

حالا برای محاسبه‌ی مشتق راست تابع f در $x=-۱$ کافیست از مشتق چپ تابع در $x=۱$ استفاده کنیم (چون f فرد است.) در نتیجه چون معادله‌ی مماس چپ به صورت $y=-x+۳$ است پس مشتق چپ که برابر شیب خط مماس است برابر ۱- می‌شود. در نتیجه: $f'_-(۱)=-۱$

چون f فرد است مشتق آن زوج است و در نتیجه:

$$f'_+(-۱)=-۱\xrightarrow{(**)}\text{حد}=۴(-۱)=-۴$$

۳. گزینه‌ی (۴)

تابع را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$g=\sqrt[۵]{x-۱}\ \sqrt[۷]{(x-۲)^۲}\ |(x-۱)(x-۲)|$$
$$=(\sqrt[۵]{x-۱}\,|x-۱|)(\sqrt[۷]{(x-۲)^۲}\,|x-۲|)$$

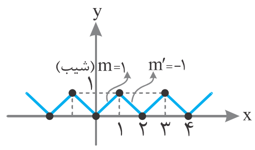
در $x=۱$ توان عبارت زیر رادیکال در عبارت $\sqrt[۵]{x-۱}$ برابر یک و فرد است پس در نتیجه با توجه به نکات گفته شده، این نقطه‌ی عطف است.

همچنین در $x=۲$ توان عبارت زیر رادیکال در عبارت $\sqrt[۷]{(x-۲)^۲}$ برابر ۲ و زوج است. در نتیجه این نقطه، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع است و از آنجا که: $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x-۱}\,|x-۱|=۱\times۱=۱>۰$

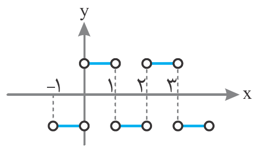
بنابراین این نقطه، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع است.

۴. گزینه‌ی (۲)

نمودار تابع داده شده به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع مشتق به صورت زیر رسم می‌شود:



در نتیجه دوره‌ی تناوب تابع f' نیز برابر ۲ است. به نظر شما دوره‌ی تناوب f و f' همواره برابر است؟

۵. گزینه‌ی (۳)

عبارت زیر رادیکال، بر $x+۱$ بخش‌پذیر است. با تقسیم این عبارت بر $x+۱$ خواهیم داشت: $x^۳-۳x-۲=(x+۱)(x^۲-x-۲)$

$$=(x+۱)(x+۱)(x-۲)=(x+۱)^۲(x-۲)$$

در نتیجه: $f(x)=\sqrt[۳]{(x+۱)^۲(x-۲)}$

در $x=-۱$ و $x=۲$ تابع f مشتق‌ناپذیر است.

(توان ریشه، کوچک‌تر از فرجه است.) در $x=-۱$ توان ریشه‌ی عبارت $(x+۱)^۲$، زوج است پس این نقطه، نقطه‌ی بازگشتی تابع است. چون:

$\lim_{x\to -۱}\sqrt[۳]{(x-۲)}=\sqrt[۳]{-۳}<۰\Rightarrow$ $x=-۱$ می‌نیمم نسبی است.

همچنین در $x=۲$، توان $(x-۲)$ برابر یک و فرد است در نتیجه این نقطه، نقطه‌ی عطف تابع است و چون:

$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}=\sqrt[۳]{۹}>۰\Rightarrow$ عطف، صعودی است.

۶. گزینه‌ی (۴)

اول اینکه تابع در $x=-۱$ پیوسته است، پس با خیال راحت بریم سراغ حل مساله. برای بررسی وضعیت همگرایی دنباله باید حد آن‌را وقتی $n\to+\infty$ بررسی کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{-n-۱}{n})-n=\lim_{n\to\infty} n(f(-۱-\frac{۱}{n})-۱)=\infty\times۰$$

برای رفع ابهام، عامل ∞ را به مخرج منتقل می‌کنیم:

$$\text{حد}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(-۱-\frac{۱}{n})-۱}{\frac{۱}{n}}=\frac{۰}{۰}$$

حالا هم می‌توانید مستقیم هوپیتال بگیرید، هم می‌توانید با تغییر متغیر $h=-\frac{۱}{n}$ حاصل حد را بیابید. این‌جا برای آشنایی بیشتر، از روش دوم حل می‌کنیم: (وقتی $n\to\infty$، $\frac{-۱}{n}$ و در نتیجه h به ۰^- میل می‌کند.)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(-۱-\frac{۱}{n})-۱}{\frac{۱}{n}}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱+h)-۱}{-h}$$
$$=-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱+h)-۱}{h}=-f'_-(-۱) \quad (*)$$

پس باید مشتق چپ تابع را در $x=-۱$ بیابیم. اما قبل از آن باید حذف قدرمطلق و براکت را با روش‌های گفته شده در حد انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} x<-۱: |x^۲-x-۲|=x^۲-x-۲ \\ x<-۱: [۲x]=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-۳(x^۲-x-۲)-x \Rightarrow f'(x)=-۶x+۳-۱$$

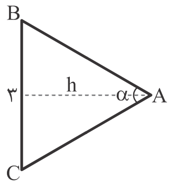
$$\Rightarrow f'_-(-۱)=۸$$

پس دنباله‌ی داده شده، با توجه به (*) به عدد ۸- همگراست.

۷. گزینه‌ی (۳)

حجم هرم برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}S_{\text{قاعده}}\times \text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}S\times ۲=\frac{۲}{۳}S$

مساحت قاعده همان مساحت مثلث ABC است:



$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۳\times h)$$

$$\Rightarrow V=\frac{۲}{۳}(\frac{۱}{۲}(۳\times h))=h \qquad (*)$$

چون تغییرات α را بحث کرده پس باید h را برحسب α بنویسیم. با توجه به شکل بالا:

$$\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{h}{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow h=\frac{۳}{۲}\cot\frac{\alpha}{۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} V=\frac{۳}{۲}\cot\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow V'_t=-\frac{۳}{۴}(۱+\cot^۲\frac{\alpha}{۲})\alpha'_t \qquad (**)$$

در لحظه‌ای که زاویه‌ی $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ است، باید سرعت افزایش حجم را محاسبه کنیم. فقط دقت کنید که زاویه‌ی α با سرعت ۶ رادیان بر ثانیه در حال کاهش است یعنی: $\alpha'_t=-۶$

$$\xrightarrow{(**)} V'_t=-\frac{۳}{۴}(۱+\cot^۲\frac{\pi}{۶})(-۶)=-\frac{۳}{۴}(۱+۳)(-۶)=۱۸$$

۸. گزینه‌ی (۲)

$$y=f(\sin x)\Rightarrow y'=\cos x\, f'(\sin x)=\sin ۳x+\sin ۵x$$

با کمک روابط تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\Rightarrow \cos x\, f'(\sin x)=۲\sin ۴x\cos x$$

$$\Rightarrow f'(\sin x)=۲\sin ۴x$$

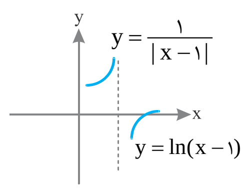
حالا با تبدیل x به $(\frac{\pi}{۲}+x)$ داریم:

$$f'(\sin(\frac{\pi}{۲}+x))=۲\sin ۴(\frac{\pi}{۲}+x)$$

$$\Rightarrow f'(\cos x)=۲\sin(۲\pi+۴x)=۲\sin ۴x$$

۹. گزینه‌ی (۳)

نمودار f' را در همسایگی $x=۱$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار f'، f در همسایگی $x=۱$ ماکزیمم دارد و نقطه‌ی بازگشتی است.

۱۰. گزینه‌ی (۴)

چون $f(۲)=۱$ بنابراین:

$$f^{-۱}(۱)=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰^-}\frac{f^{-۱}(۱-h^۲)-۲}{h^۲}=\frac{۰}{۰}$$

$$\overset{HOP}{=}\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲h(f^{-۱})'(۱-h^۲)}{۲h}=-(f^{-۱})'_-(۱)$$

و با توجه به نکات تابع معکوس و با توجه به اکیداً نزولی بودن f:

$$\text{حد}=-\frac{۱}{f'_+(۲)}=-\frac{۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱. گزینه‌ی (۱)

$$y=f(\frac{۲x}{f(x)})\Rightarrow y'=\frac{۲f(x)-۲xf'(x)}{(f(x))^۲}f'(\frac{۲x}{f(x)}) \qquad (*)$$

چون مشتق تابع در $x=۱$ موجود است، بنابراین $f'(۱)$ هم موجود است. در نتیجه با توجه به ضابطه‌ی f: مشتق f در $x=۱$ برابر مشتق راست آن در $x=۱$ است و مقدار تابع هم از ضابطه‌ی پایین قابل محاسبه است:

$$f(x)=-x+\ln x^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=-۱ \\ f'(x)=-۱+\frac{۲x}{x^۲}\Rightarrow f'(۱)=-۱+۲=۱ \end{cases}$$

پس با توجه به (*):

$$y'(۱)=\frac{۲f(۱)-۲f'(۱)}{(f(۱))^۲}f'(\frac{۲}{f(۱)})$$

$$=\frac{۲(-۱)-۲(۱)}{(-۱)^۲}f'(\frac{۲}{-۱})=-۴f'(-۲) \qquad (**)$$

برای محاسبه‌ی $f'(-۲)$ باید از ضابطه‌ی بالا استفاده کنیم پس باید a و b را بیابیم. چون f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است با توجه به پیوستگی و برابری مشتق‌های چپ و راست در این نقطه، $a=۲$ و $b=-۳$ محاسبه می‌شود. در نتیجه:

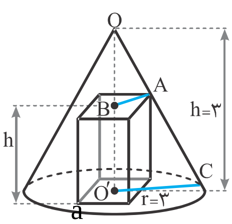
ضابطه‌ی بالا: $f(x)=۲x^۲-۳x\Rightarrow f'(x)=۴x-۳\Rightarrow f'(-۲)=-۱۱$

$$\xrightarrow{(**)} y'=-۴(-۱۱)=۴۴$$

۱۲. گزینه‌ی (۳)

شکل مسئله به صورت مقابل است:

با توجه به شکل $\frac{AB}{O'C}=\frac{OB}{OO'}$



$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}a}{۳}=\frac{۳-h}{۳}\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}a=۳-h$$

$$\Rightarrow h=۳-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

پس حجم مکعب مستطیل برابر است با:

$$V=a\times a\times(3-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$$

$$\Rightarrow V=3a^2-\frac{\sqrt{2}}{2}a^3\Rightarrow V'=6a-\frac{3\sqrt{2}}{2}a^2=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{12}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

پس حجم ماکزیمم برابر است با: $V(2\sqrt{2})=8$

۱۳. گزینه‌ی (۳)

چون مماس‌های چپ و راست داریم بنابراین f حتماً در $x=0$ پیوسته است:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x2^{\frac{1}{x}}+x}{a2^x+1}=\frac{0}{a+1}=0\quad\Rightarrow b=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}+b+1=b+1$$

پس مشتق راست تابع در $x=0$ برابر است با:

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

پس در $x=0$ مماس راست عمودی است. مماس چپ هم به طریق زیر قابل محاسبه است:

$$y=\frac{x(2^{\frac{1}{x}}+1)}{a2^x+1}$$ (در $x=0$ عامل صفرشونده داریم)

$$\Rightarrow y'(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{a2^x+1}\Rightarrow y'_-(0)=\frac{0+1}{a+1}=\frac{1}{a+1}$$

(توجه کنید که $2^{-\infty}=1$ و $2^0=1$)

چون زاویه‌ی بین مماس‌ها برابر $\frac{\pi}{4}$ است و مماس راست، عمودی است پس باید:

$$y'_-(0)=\pm1\Rightarrow\frac{1}{a+1}=\pm1\Rightarrow a=0 \text{ یا } a=-2$$

$$\Rightarrow a+b=-1 \text{ یا } -3$$

۱۴. گزینه‌ی «۱»

نکته تابع به فرم کلی $f(x)=\begin{cases}g(x), & x\notin Q\\ h(x), & x\in Q\end{cases}$ در نقاطی مشتق دوم دارد که سه معادله‌ی زیر هم‌زمان برقرار باشند:

۱ $g(x)=h(x)$

۲ $g'(x)=h'(x)$

۳ $g''(x)=h''(x)$

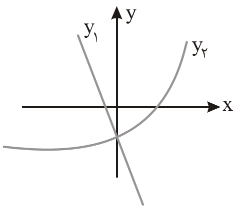
چون حل معادلات ۱ و ۲ در این تست با توجه به ضابطه‌ی f آسان نیست، از معادله‌ی ۳ شروع کرده و جواب‌های آن را می‌یابیم. اگر این جواب‌ها در معادلات ۱ و ۲ صدق کرد، جواب هستند و تابع f در آن طول‌ها، مشتق دوم دارد. پس مشتق دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2-x^3, & x\notin Q\\ e^{2x}-5x^2-2x-1, & x\in Q\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-6x-3x^2, & x\notin Q\\ 2e^{2x}-10x-2, & x\in Q\end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6-6x, & x\notin Q\\ 4e^{2x}-10, & x\in Q\end{cases}$$

حالا با رسم توابع $y_1=6-6x$ و $y_2=4e^{2x}-10$ در یک دستگاه مختصات، ریشه‌های معادله‌ی ۳ را می‌یابیم. پس این معادله تنها جواب $x=0$ دارد. حالا چون به ازای $x=0$ معادلات ۱ و ۲ هم برقرارند، بنابراین تابع f تنها در نقطه‌ی $x=0$ مشتق دوم دارد.



۱۵. گزینه‌ی (۱)

معادله‌ی خط قائم همان $y=-x$ است. شیب خط قائم برابر ۱- است پس:

$$f'(x)=3x^2+a\Rightarrow f'(x_0)=3x_0^2+a$$

$$\Rightarrow \text{شیب قائم}=\frac{-1}{3x_0^2+a}=-1\Rightarrow 3x_0^2+a=1$$

$$\Rightarrow a=1-3x_0^2 \qquad (*)$$

چون معادله‌ی قائم به صورت $y=-x$ است، بنابراین در نقطه‌ی x_0: $y_0=-x_0$

پس $(x_0,-x_0)$ در f نیز صدق می‌کند:

$$-x_0=x_0^3+ax_0+12$$

$$\xrightarrow{(*)}-x_0=x_0^3+(1-3x_0^2)x_0+12$$

$$\Rightarrow -x_0=x_0^3-3x_0^3+x_0+12\Rightarrow 2x_0^3-2x_0-12=0$$

$$\Rightarrow x_0^3-x_0-6=0\Rightarrow x_0=2\xrightarrow{(*)}a=-11$$

۱۶. گزینه‌ی (۲)

$$y=(f.g)(x)=x\sin x$$

اگر فرمولی داشته باشد، با چند بار مشتق‌گیری می‌توانیم فرمول راپیدا کنیم:

$$y'=\sin x+x\cos x\Rightarrow y''=\cos x+\cos x-x\sin x$$

$$\Rightarrow y''=2\cos x-y\ (*)\Rightarrow y'''=-2\sin x-y'$$

$$\Rightarrow y^{(4)}=-2\cos x-y''\xrightarrow{(*)}$$

$$y^{(4)}=-2\cos x-(2\cos x-y)$$

$$\Rightarrow y^{(4)}=-4\cos x+y\quad (**)$$

بعد از هر چهار بار مشتق‌گیری مشتق عبارت $\cos x$ به خودش برمی‌گردد. بنابراین: $y^{(8)}=-4\cos x+y^{(4)}$

$$\xrightarrow{(**)}y^{(8)}=-4\cos x-4\cos x+y$$

$$\Rightarrow y^{(8)}=-8\cos x+y$$

$$\Rightarrow y^{(20)}=-20\cos x+y\Rightarrow y^{(20)}=-20\cos x+x\sin x$$

$$\Rightarrow y^{(20)}(\frac{\pi}{2})=-20(0)+\frac{\pi}{2}(1)=\frac{\pi}{2}$$

۱۷. گزینه‌ی (۳)

تابع g^{-1} را برحسب f^{-1} می‌یابیم:

$$g(x)=\frac{2-f(x)}{f(x)}\Rightarrow g(x)=\frac{2}{f(x)}-1$$

به جای x، $g^{-1}(x)$ قرار می‌دهیم: $g(g^{-1}(x))=\frac{2}{f(g^{-1}(x))}-1$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{f(g^{-1}(x))}-1\Rightarrow x+1=\frac{2}{f(g^{-1}(x))}$$

$$\Rightarrow f(g^{-1}(x))=\frac{2}{x+1}\Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{2}{x+1})$$

حالا از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$(g^{-1})'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}(f^{-1})'(\frac{2}{x+1})$$

با قرار دادن $x=-3$: $(g^{-1})'(-3)=\frac{-2}{(-3+1)^2}(f^{-1})'(-1)$

با توجه به اینکه $(f^{-1})'(-1)=2$ است، خواهیم داشت:

$$(g^{-1})'(-3)=\frac{-2}{4}(2)=-1$$

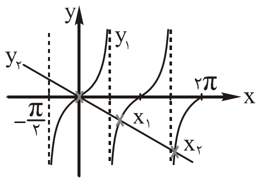
۱۸. گزینه‌ی (۴)

$$f(x)=x\sin x\Rightarrow f'(x)=\sin x+x\cos x=0\,(*)$$

اما حل این معادله برای یافتن نقاط بحرانی کار ساده‌ای نیست. پس از روش رسم کمک می‌گیریم: $\sin x+x\cos x=0\Rightarrow \sin x=-x\cos x$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (ریشه‌های $\cos x=0$) جواب این معادله نیست، پس با تقسیم طرفین تساوی بر $\cos x$: $\overbrace{\tan x}^{y_1}=\overbrace{-x}^{y_2}$

با رسم نمودارهای y_1 و y_2 در یک دستگاه مختصات، در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},2\pi)$ نقاط بحرانی و در نتیجه نقاط اکسترمم را می‌یابیم:



همان‌طور که می‌بینید دو تابع، سه نقطه‌ی تلاقی (و نه مماس) دارند، پس تابع ۳ اکسترمم نسبی دارد.

حالا با کمک آزمون مشتق دوم در $x=0$، وضعیت اکسترمم‌های تابع را بررسی می‌کنیم: $\xrightarrow{(*)} f'(x)=\sin x+x\cos x$

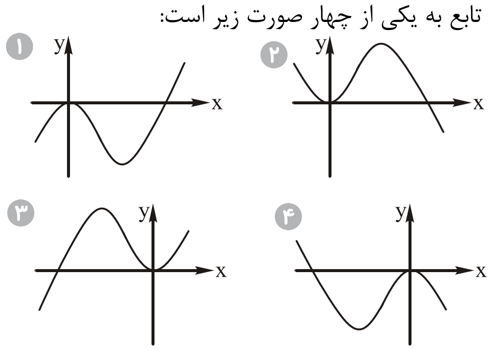
$$\Rightarrow f''(x)=\cos x+\cos x-x\sin x$$

$\Rightarrow f''(0)=2>0\Rightarrow$ $x=0$ طول می‌نیمم نسبی تابع است.

چون f پیوسته است و **در یک تابع پیوسته، دو ماکزیمم نسبی یا دو می‌نیمم نسبی پشت سر هم اتفاق نمی‌افتد،** پس x_1 طول ماکزیمم نسبی و x_2 طول می‌نیمم نسبی تابع است. در نتیجه f در فاصله‌ی $(\frac{-\pi}{2},2\pi)$، دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

۱۹. گزینه‌ی (۱)

قبلا گفتیم در تابع $f(x)=(x-a)^{2n}.g(x)$ ، $x=a$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع است. بنابراین در تابع $y=x^2(ax+b)$ ، $x=0$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع است و مسلماً عرض تابع هم در این نقطه صفر است. پس منحنی تابع به یکی از چهار صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید فقط در حالت ۴ منحنی از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند. پس ویژگی‌های این حالت را با هم بررسی می‌کنیم. نمودار ختم شونده به نواحی دوم و چهارم است: $a<0$

ریشه‌ی دیگر تابع در سمت چپ محور yها است و این ریشه از حل معادله‌ی $ax+b=0$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$ax+b=0\Rightarrow x=\frac{-b}{a}<0$$

چون $a<0$ بود: $-\frac{b}{a}<0\Rightarrow b<0\Rightarrow a+b<0$

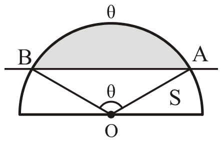
۲۰. گزینه‌ی (۴)

اطلاعات لحظه‌ای و خواسته‌ی مساله: $\widehat{AB}=\theta=\frac{2\pi}{3}$

$\theta'_t=\frac{\pi}{5}$: سرعت افزایش کمان $\frac{\pi}{5}$ است.

$S'_t=?$: سرعت افزایش مساحت قسمت هاشورخورده.

پس باید رابطه‌ای بین S و θ پیدا کنیم.



با توجه شکل مقابل، مساحت قسمت هاشورخورده از تفاضل مساحت قطاع OAB و مساحت مثلث OAB حاصل می‌شود. مساحت قطاع OAB برابر است با: $S'=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{25}{2}\theta$

مساحت مثلث OAB برابر است با: $S''=\frac{1}{2}(r)(r)\sin\theta$

$$\Rightarrow S''=\frac{r^2}{2}\sin\theta\Rightarrow S''=\frac{25}{2}\sin\theta$$

بنابراین: $S=S'-S''=\frac{25}{2}(\theta-\sin\theta)$

حالا از طرفین رابطه، نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$S'_t=\frac{25}{2}(\theta'_t-\theta'_t\cos\theta)$$

حالا با توجه به اطلاعات مساله:

$$S'_t=\frac{25}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{3}))=\frac{25}{2}(\frac{3\pi}{10})=\frac{15\pi}{4}$$