پاسخنامه هایپر تست فصل دوم

۱. گزینه‌ی «۳»

از واسطه‌ی حسابی برای حل استفاده می‌کنیم:

$$\log_{۴}^{۴x-۳}=\frac{\log_{۲}^{۲x-۱}+\log_{۲}^{x}}{۲}\Rightarrow ۲\log_{۴}^{۴x-۳}=\log_{۲}^{۲x^{۲}-x}$$

$$\Rightarrow ۲\log_{۲^{۲}}^{۴x-۳}=\log_{۲}^{۲x^{۲}-x}\Rightarrow \log_{۲}^{۴x-۳}=\log_{۲}^{۲x^{۲}-x}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-x=۴x-۳\Rightarrow ۲x^{۲}-۵x+۳=۰\Rightarrow x=۱,\ x=\frac{۳}{۲}$$

با قرار دادن $x=۱$ هر سه جمله صفر می‌شوند. پس $x=\frac{۳}{۲}$ است.

۲. گزینه‌ی «۱»

برای محاسبه‌ی مجموع خواسته شده، خواهیم داشت:

(*) مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۵ + مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۲ $S=$

(مجموع اعداد بخش‌پذیر بر ۲و۵) ۲-

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{اعداد بخشپذیر بر ۲: }۲,۴,\ldots,۱۰۰\Rightarrow S_{۱}=\frac{۵۰}{۲}[۲+۱۰۰]=۲۵۵۰\\ \text{اعداد بخشپذیر بر ۵: }۵,۱۰,\ldots,۱۰۰\Rightarrow S_{۲}=\frac{۲۰}{۲}[۵+۱۰۰]=۱۰۵۰\\ \text{اعداد بخشپذیر بر ۱۰: }۱۰,۲۰,\ldots,۱۰۰\Rightarrow S_{۳}=\frac{۱۰}{۲}[۱۰+۱۰۰]=۵۵۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} S=S_{۱}+S_{۲}-۲(S_{۳})=۲۵۵۰+۱۰۵۰-۲(۵۵۰)\Rightarrow S=۲۵۰۰$$

۳. گزینه‌ی «۴»

$$a_{n}=\frac{۳^{n+۱}}{۵^{n}}-\frac{۴^{n}}{۵^{n}}=۳(\frac{۳}{۵})^{n}-(\frac{۴}{۵})^{n}$$

پس برای محاسبه‌ی حد مجموع جملات دنباله‌ی a_n، از حد مجموع هر یک از دنباله‌های به دست آمده استفاده می‌کنیم:

$$S=۳\left(\frac{\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}}\right)-\left(\frac{\frac{۴}{۵}}{۱-\frac{۴}{۵}}\right)=\frac{۹}{۲}-۴=\frac{۱}{۲}$$

۴. گزینه‌ی «۳»

جملات دنباله‌ی حسابی را به‌صورت $a,b,۱۰$ در نظر می‌گیریم.

پس: $b=\frac{a+۱۰}{۲}$

در نتیجه جملات به‌صورت $a\ ,\ \frac{a+۱۰}{۲}\ ,۱۰$ خواهند بود. به جمله‌ی سوم k واحد اضافه می‌کنیم. $a\ ,\ \frac{a+۱۰}{۲}\ ,۱۰+k$

چون این جملات تشکیل دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۳ می‌دهند:

$$(۱)\ \frac{\frac{a+۱۰}{۲}}{a}=۳\Rightarrow\frac{a+۱۰}{۲}=۳a\Rightarrow a=۲$$

$$(۲)\ \frac{۱۰+k}{\frac{a+۱۰}{۲}}=۳\xrightarrow{a=۲}\frac{۱۰+k}{۶}=۳\Rightarrow k=۸$$

۵. گزینه‌ی «۱»

جملات دنباله‌ی هندسی را به صورت a,b,c در نظر می‌گیریم

$b^{۲}=ac$ (*)

۸ واحد به جمله‌ی دوم اضافه می‌کنیم و دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌شود:

$$a,b+۸,c\Rightarrow b+۸=\frac{a+c}{۲}\ (**)$$

۶۴ واحد به جمله‌ی سوم اضافه می‌کنیم و دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهیم.

$$a,b+۸,c+۶۴\Rightarrow(b+۸)^{۲}=a(c+۶۴)$$

$$\Rightarrow b^{۲}+۱۶b+۶۴=ac+۶۴a$$

$$\xrightarrow{(*)} b^{۲}+۱۶b+۶۴=b^{۲}+۶۴a\Rightarrow b+۴=۴a\ \ (۱)$$

$$\xrightarrow{(**)}\frac{a+c}{۲}-۸+۴=۴a\Rightarrow\frac{a+c}{۲}-۴=۴a$$

$$\Rightarrow a+c-۸=۸a\Rightarrow c=۷a+۸\ \ (۲)$$

با قرار دادن (۱) و (۲) در (*):

$$(۴a-۴)^{۲}=a(۷a+۸)\Rightarrow ۱۶a^{۲}-۳۲a+۱۶=۷a^{۲}+۸a$$

$$۹a^{۲}-۴۰a+۱۶=۰\Rightarrow a=۴\ \text{یا}\ a=\frac{۴}{۹}$$

$a=۴$ اگر $\rightarrow$ جملات : ۴,۱۲,۳۶ صعودی

☑ غیریکنوا : $a=\frac{۴}{۹}$ اگر $\rightarrow$ جملات : $\frac{۴}{۹},\frac{-۲۰}{۹},\frac{۱۰۰}{۹}$

۶. گزینه‌ی «۲»

دنباله را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$۵(۱,۱۱,۱۱۱,\ldots)\Rightarrow۵(\frac{۱۰-۱}{۹},\frac{۱۰^{۲}-۱}{۹},\frac{۱۰^{۳}-۱}{۹},\cdots)$$

$$\Rightarrow S_{n}=۵(\frac{۱۰}{۹}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱۰^{۲}}{۹}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱۰^{۳}}{۹}-\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱۰^{n}}{۹}-\frac{۱}{۹})$$

$$\Rightarrow S_{n}=۵\left((\frac{۱۰}{۹}+\frac{۱۰^{۲}}{۹}+\cdots+\frac{۱۰^{n}}{۹})-(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱}{۹})\right)$$

$$\Rightarrow S_{n}=۵\left(\left(\frac{\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{n}-۱)}{۱۰-۱}\right)-\frac{n}{۹}\right)$$

$$\Rightarrow S_{n}=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{n}-۱)-n\right)$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۰}-۱)-۱۰\right)=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰^{۱۱}-۱۰}{۹}-۱۰\right)$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۵}{۹}\left(\frac{۱۰^{۱۱}-۱۰۰}{۹}\right)=\frac{۵}{۸۱}(۱۰^{۱۱}-۱۰^{۲})$$

۷. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{S_{۵}}{S_{۸}}=\frac{۲۵}{۶۴}\Rightarrow\frac{\frac{۵}{۲}[۲a_{۱}+(۴)d]}{\frac{۸}{۲}[۲a_{۱}+(۷)d]}=\frac{۲۵}{۶۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۲a_{۱}+۴d}{۲a_{۱}+۷d}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۱۶a_{۱}+۳۲d=۱۰a_{۱}+۳۵d$$

$$\Rightarrow ۶a_{۱}=۳d\Rightarrow d=۲a_{۱}\ \ (*)$$

حالا نسبت جمله‌ی پنجم به هشتم را می‌یابیم:

$$\frac{a_{۵}}{a_{۸}}=\frac{a_{۱}+۴d}{a_{۱}+۷d}\overset{(*)}{=}\frac{a_{۱}+۸a_{۱}}{a_{۱}+۱۴a_{۱}}=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}$$

۸. گزینه‌ی «۳»

تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی داده شده، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند: $b_n = ۲,۴,۶,\ldots$

حالا نگاه کنید که مثلاً جمله‌ی سوم دنباله‌ی داده شده برابر جمله‌ی اول دنباله‌ی داده شده بعلاوه‌ی مجموع دو جمله‌ی اول دنباله‌ی b_n است.

پس جمله‌ی پنجاهم دنباله‌ی داده شده، برابر جمله‌ی اول بعلاوه‌ی مجموع ۴۹ جمله‌ی اول دنباله‌ی b_n است. پس مجموع ۴۹ جمله‌ی اول دنباله‌ی b_n را می‌یابیم:

$$S_{۴۹} = \frac{۴۹}{۲}\left[۲(۲)+۴۸(۲)\right] = ۲۴۵۰$$
$$\Rightarrow a_{۵۰} = ۳ + ۲۴۵۰ = ۲۴۵۳$$

۹. گزینه‌ی «۴»

حد مجموع جملات: $\frac{a_۱}{۱-q} = ۳ \quad (*)$

حد مجموع مکعب همان جملات: $\frac{a_۱^۳}{۱-q^۳} = \frac{۱۰۸}{۱۳}$

$$\xrightarrow{(*)} \left(\frac{a_۱}{۱-q}\right)\left(\frac{a_۱^۲}{۱+q+q^۲}\right) = \frac{۱۰۸}{۱۳}$$
$$\Rightarrow ۳\left(\frac{a_۱^۲}{۱+q+q^۲}\right) = \frac{۱۰۸}{۱۳} \Rightarrow \frac{a_۱^۲}{۱+q+q^۲} = \frac{۳۶}{۱۳} \quad (**)$$

حالا از رابطه‌ی (*) داریم: $a_۱ = ۳(۱-q)$

$$\xrightarrow{(**)} \frac{۹(۱-q)^۲}{۱+q+q^۲} = \frac{۳۶}{۱۳} \Rightarrow \frac{۱+q^۲-۲q}{۱+q+q^۲} = \frac{۴}{۱۳}$$
$$\Rightarrow ۱۳+۱۳q^۲-۲۶q = ۴+۴q+۴q^۲ \Rightarrow ۹q^۲-۳۰q+۹ = ۰$$
$$\Rightarrow ۳q^۲-۱۰q+۳ = ۰ \Rightarrow q = \frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۳۶}}{۶} = \frac{۱۰\pm۸}{۶} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{۱}{۳} \\ q = ۳ \end{cases}$$

چون دنباله نزولی است $q = \frac{۱}{۳}$ و از (*): $\frac{a_۱}{۱-\frac{۱}{۳}} = ۳ \Rightarrow a_۱ = ۲$

۱۰. گزینه‌ی «۳»

اول دقت کنید که $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱} = \sqrt{۲}-۱$، از طرفی:

$$x > ۰ : \tan^{-۱} x + \tan^{-۱}\frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲}$$

حالا با توجه به واسطه‌ی حسابی داریم:

$$k = \frac{\tan^{-۱}(\sqrt{۲}-۱)+\tan^{-۱}(\sqrt{۲}+۱)}{۲} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow \sin k = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$