پاسخنامه هایپر تست فصل سوم

۱. گزینه‌ی «۱»

$$(\log ۵)^{\cos^۲ x}(\log ۲)^{\sin^۲ x} = (\log ۵)^{۱-\sin^۲ x} \times (\log ۲)^{\sin^۲ x}$$
$$= (\log ۵)(\log ۵)^{-\sin^۲ x} \times (\log ۲)^{\sin^۲ x}$$
$$= \log ۵ \times (\frac{\log ۲}{\log ۵})^{\sin^۲ x} = \log ۵ \times (\log_۵^۲)^{\sin^۲ x}$$

چون $۰ < \log_۵^۲ < ۱$ است پس ماکزیمم عبارت زمانی اتفاق می‌افتد که $\sin^۲ x = ۰$ باشد.

$$\Rightarrow \text{ماکزیمم} = \log ۵$$

۲. گزینه‌ی «۳»

اول دقت کنید که: $x = ۱۰^{\log x}$

پس معادله به‌صورت زیر خواهد شد:

$$۶^{\log x} + ۸^{\log x} = ۱۰^{\log x}$$

با تقسیم طرفین تساوی بر $۱۰^{\log x}$، داریم:

$$(\frac{۶}{۱۰})^{\log x} + (\frac{۸}{۱۰})^{\log x} = ۱$$

عبارت سمت چپ یک عبارت همواره نزولی و مثبت است، بنابراین از برخورد نمودارهای دو تابع $y = ۱$ و $y = (\frac{۶}{۱۰})^{\log x} + (\frac{۸}{۱۰})^{\log x}$ تنها یک نقطه حاصل می‌شود. پس معادله ۱ ریشه دارد. ریشه‌ی این معادله هم برابر است با: $\log x = ۲ \Rightarrow x = ۱۰۰$

۳. گزینه‌ی «۱»

به تساوی مقابل توجه کنید: $\sqrt{۲-\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$

بنابراین با فرض $(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x = k$ داریم:

$$k + \frac{۱}{k} = ۴ \Rightarrow k^۲ - ۴k + ۱ = ۰ \Rightarrow k = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow k = ۲ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x = ۲+\sqrt{۳} \\ (\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x = ۲-\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

پس قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر ۴ است.

۴. گزینه‌ی «۲»

$$xy = ۴۰ \Rightarrow \log xy = \log ۴۰ \Rightarrow \log x + \log y = \log ۴۰ \quad (*)$$
$$x^{\log y} = ۴ \xrightarrow{\text{از طرفین log می‌گیریم}} (\log x)(\log y) = \log ۴ \quad (**)$$

با فرض $\log x = a$ و $\log y = b$ در معادله‌های (*) و (**):

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \log ۴۰ = ۱ + \log ۴ \\ ab = \log ۴ \Rightarrow b = \frac{\log ۴}{a} \end{cases}$$
$$\Rightarrow a + \frac{\log ۴}{a} = ۱ + \log ۴ \Rightarrow a^۲ - (۱ + \log ۴)a + \log ۴ = ۰$$
$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} a = ۱ \text{ یا } a = \log ۴ \Rightarrow x = ۱۰ \text{ یا } x = ۴$$
$$\Rightarrow y = ۴ \text{ یا } y = ۱۰$$

پس جواب‌ها به صورت $(y = ۴, x = ۱۰)$ یا $(x = ۴, y = ۱۰)$ خواهند بود که در هر دو حالت: $|y - x| = ۶$

۵. گزینه‌ی «۲»

چون خروجی رادیکال هیچ وقت منفی نمیشه پس باید $\log_x^{\sqrt{۲}}$ منفی باشه تا طرف راست هم مثبت بشه.

طرفین به توان ۲:

$$\log_x^{۲\sqrt{۲}} + \log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۸}} = ۱۲(\log_x^{\sqrt{۲}})^۲$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_x^۲ + ۳ = ۱۲(\frac{۱}{۲}\log_x^۲)^۲$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\log_x^۲ + ۳ = ۳(\log_x^۲)^۲ \xrightarrow{\log_x^۲ = A \text{ با فرض}}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}A + ۳ = ۳A^۲ \xrightarrow{\times(\frac{۲}{۳})} ۲A^۲ - A - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow A = \frac{۱ \pm \sqrt{۱۷}}{۴} \Rightarrow \log_x^۲ = \frac{۱ \pm \sqrt{۱۷}}{۴}$$

که با توجه به توضیحات بالا تنها مقدار $\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۴}$ قابل قبوله. (چون A باید منفی باشه)

۶. گزینه‌ی «۲»

$$\log ۳۰ = ۱/۴۸ \Rightarrow \log ۳ + \log ۱۰ = ۱/۴۸ \Rightarrow \log ۳ = ۰/۴۸ \quad (*)$$
$$\log ۴۵ = ۲\log ۳ + \log ۵ = ۱/۶۵ \xrightarrow{(*)} ۲(۰/۴۸) + \log ۵ = ۱/۶۵$$
$$\Rightarrow \log ۵ = ۰/۶۹ \Rightarrow ۱ - \log ۲ = ۰/۶۹ \Rightarrow \log ۲ = ۰/۳۱ \quad (**)$$

از (*) و (**).

$$\log ۶ = \log ۲ + \log ۳ = ۰/۳۱ + ۰/۴۸ = ۰/۷۹$$

۷. گزینه‌ی «۲»

$$\log_{۱۵}^۵ = a \Rightarrow \log_{۱۵}^۳ = ۱ - a$$

برای محاسبه‌ی $\log ۳$ با توجه به اطلاعات مسأله از تساوی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\log ۳ = \frac{\log_{۱۵}^۳}{\log_{۱۵}^{۱۰}} = \frac{۱-a}{\log_{۱۵}^۲ + \log_{۱۵}^۵} = \frac{۱-a}{b+a}$$

۸. گزینه‌ی «۴»

از رابطه‌ی $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ داریم:

$$\frac{۱}{\log_۲^x} + \frac{۱}{\log_۲^{(x+۱)}} = \frac{۱}{\log_۲^x} \times \frac{۱}{\log_۲^{(x+۱)}}$$
$$\Rightarrow \frac{\log_۲^{(x+۱)} + \log_۲^x}{\log_۲^x \log_۲^{(x+۱)}} = \frac{۱}{\log_۲^x \log_۲^{(x+۱)}}$$
$$\Rightarrow \log_۲^{(x+۱)} + \log_۲^x = ۱ \Rightarrow \log_۲^{x^۲+x} = ۱$$
$$\Rightarrow x^۲ + x = ۲ \Rightarrow x = ۱, x = -۲$$

هیچ‌کدام از این دو مقدار در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کنند پس معادله، ریشه‌ی حقیقی نداره.

۹. گزینه‌ی «۱»

$$\log_{۲}^{۲x}\times\log_{۲}^{\frac{x}{۴}}=۴\Rightarrow(\log_{۲}^{۲}+\log_{۲}^{x})(\log_{۲}^{x}-\log_{۲}^{۴})=۴$$

$$\Rightarrow(۱+\log_{۲}^{x})(\log_{۲}^{x}-۲)=۴$$

$$\Rightarrow(\log_{۲}^{x})^{۲}-\log_{۲}^{x}-۲=۴\Rightarrow(\log_{۲}^{x})^{۲}-\log_{۲}^{x}-۶=۰$$

$$\Rightarrow(\log_{۲}^{x}+۲)(\log_{۲}^{x}-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}\log_{۲}^{x}=-۲\Rightarrow x_{۱}=\frac{۱}{۴}\\ \log_{۲}^{x}=۳\Rightarrow x_{۲}=۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow|x_{۱}-x_{۲}|=\frac{۳۱}{۴}$$

۱۰. گزینه‌ی «۳»

$$\log_{۷}^{۲۱}=\log_{۷}^{۳}+\log_{۷}^{۷}=\log_{۷}^{۳}+۱\quad(*)$$

برای محاسبه‌ی $\log_{۷}^{۳}$ هم داریم:

$$\log_{۷}^{۵}\times\log_{۵}^{۳}=ab\Rightarrow\log_{۷}^{۳}=ab$$

$$\xrightarrow{(*)}\log_{۷}^{۲۱}=ab+۱$$

دقت کنید که: $\log_{۷}^{۵}=\frac{\log ۵}{\log ۷}\,,\ \log_{۵}^{۳}=\frac{\log ۳}{\log ۵}$