پاسخنامه هایپر تست فصل چهارم

۱. گزینه‌ی «۲»

$$x^3-x^2-x+1\Rightarrow x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)$$
$$=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1)$$

چون مقسوم علیه از درجه‌ی سوم است، باقیمانده حداکثر از درجه‌ی ۲ است. بنابراین:

$$x^{15}+x^{13}+x+1=(x-1)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

حالا باید $Q(x)$ را حذف کنیم که در حالت‌های زیر این اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases} x=1: 4=a+b+c\Rightarrow a+b+c=4 \\ x=-1: -2=a-b+c\Rightarrow a-b+c=-2 \quad (*) \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} b=3$$
$$x=1 \text{ مشتق در } : 15x^{14}+13x^{12}+1=2(x-1)(x+1)Q(x)+2ax+b$$
$$\Rightarrow 29=2a+b \xrightarrow{b=3} a=13 \xrightarrow{(*)} c=-12$$

پس باقیمانده برابر $13x^2+3x-12$ است.

۲. گزینه‌ی «۴»

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x+(2x-3)+3(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3})\underbrace{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})}_{\sqrt[3]{12x-12}}=12x-12$$
$$\Rightarrow 3x-3+3(\sqrt[3]{2x^2-3x})(\sqrt[3]{12x-12})=12x-12$$
$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{2x^2-3x}\,\sqrt[3]{12x-12}=9x-9$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x^2-3x}\,\sqrt[3]{12x-12}=3x-3$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(2x^2-3x)(12x-12)=27(x-1)^3$$
$$(2x^2-3x)\overset{4}{\cancel{(12)}}(x-1)=\overset{9}{\cancel{27}}(x-1)^3$$
$$\xrightarrow{x-1=0\Rightarrow x=1} 8x^2-12x=9(x-1)^2$$
$$\Rightarrow 8x^2-12x=9x^2-18x+9\Rightarrow x^2-6x+9=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2=0\Rightarrow x=3$$

پس ریشه‌های معادله $x=1$ و $x=3$ است و مجموع آنها برابر ۴ است.

۳. گزینه‌ی «۴»

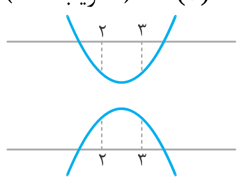
$$x^4-x^3+x^2-x+1=0 \xrightarrow{\times(x+1)} x^5+1=0\Rightarrow x^5=-1$$

پس حاصل عبارات داده شده برابر است با:

$$\frac{x^{20}+x^{10}}{4x^{-5}+x^{10}}=\frac{(x^5)^4+(x^5)^2}{4(x^5)^{-1}+(x^5)^2}=\frac{1+1}{4(-1)+1}=-\frac{2}{3}$$

۴. گزینه‌ی «۱»

با توجه به مسأله، نمودارهای زیر را خواهیم داشت. با توجه به شکل باید هر دو حالت $(x^2 \text{ ضریب})\times f(2)<0$ و $(x^2 \text{ ضریب})\times f(3)<0$ همزمان برقرار باشند:



$$\begin{cases} (x^2 \text{ ضریب})\times f(2)<0\Rightarrow (a-2)(4a-20)<0\Rightarrow 2<a<5 \\ (x^2 \text{ ضریب})\times f(3)<0\Rightarrow (a-2)(7a-36)<0\Rightarrow 2<a<\frac{36}{7} \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 2<a<5$$

که این بازه شامل دو مقدار صحیح است.

۵. گزینه‌ی «۳»

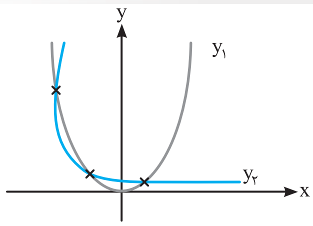
جمله‌ی kاُم بسط را می‌نویسیم:

$$P_{k+1}=\binom{20}{k}(\sqrt[3]{2})^k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20-k}$$
$$=\binom{20}{k}(2^{\frac{k}{3}})\left((-2)^{\frac{k}{2}-10}\right)=\binom{20}{k}(-1)^{\frac{k}{2}-10}\quad 2^{\frac{5k}{6}-10}$$

برای اینکه جمله‌ی kاُم عددی گویا باشد، باید k مضرب ۶ باشد پس مقادیر ۰,۶,۱۲,۱۸ برای k قابل قبول است.

۶. گزینه‌ی «۲»

$$\underbrace{x^2}_{y_1}=\underbrace{(\tfrac{1}{2})^x}_{y_2}\Rightarrow$$



با توجه به نقاط تقاطع دو منحنی، معادله دو جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.

۷. گزینه‌ی «۲»

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=x+k\Rightarrow x-\left[x+\frac{1}{2}\right]=-k$$
$$\Rightarrow (x+\frac{1}{2})-\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}-k$$

عبارت طرف چپ در بازه‌ی $[0,1)$ تغییر می‌کند. بنابراین برای برقرار بودن معادله باید:

$$0\le \frac{1}{2}-k<1\Rightarrow -\frac{1}{2}\le -k<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{-1}{2}<k\le \frac{1}{2}$$

۸. گزینه‌ی «۲»

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(S^2-2P)^2-2P^2$$
$$\Rightarrow \alpha^4+\beta^4=(1+6)^2-2(9)=31$$
$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP=1-3(1)(-3)=10$$

بنابراین با ضرب این دو عبارت در هم داریم:

$$(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^3+\beta^3)=\alpha^7+\beta^7+\alpha^3\beta^4+\alpha^4\beta^3$$
$$\Rightarrow (31)(10)=\alpha^7+\beta^7+(\alpha\beta)^3(\alpha+\beta)$$
$$\Rightarrow 310=\alpha^7+\beta^7+(-3)^3(1)\Rightarrow \alpha^7+\beta^7=337$$

۹. گزینه‌ی «۳»

معادلات درجه‌ی چهارم که به فرم $(ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0)$ هستند را معادلات درجه‌ی چهارم متقارن می‌نامند. برای حل، طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم: $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$

$$\xrightarrow{\times(\frac{1}{x^2})} x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2(x+\frac{1}{x})-1=0$$

با توجه به اینکه $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود: $((x+\frac{1}{x})^2-2)-2(x+\frac{1}{x})-1=0$: معادله

$$\Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2-2(x+\frac{1}{x})-3=0 \xrightarrow{x+\frac{1}{x}=t} t^2-2t-3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1 & \text{(جواب ندارد.)} \\ t=3 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 & (*) \end{cases}$$

مجموع ریشه‌های معادله‌ی اصلی همان مجموع ریشه‌های معادله‌ی (*) است، که برابر ۳ است.

یادآوری ۱ حدود تغییرات $x+\frac{1}{x}$، فاصله‌ی $\mathbb{R}-(-2,2)$ است.

۲ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۱۰. گزینه‌ی «۳»

این تست رو هم آوردم که دیگه هیچ جای خالی باقی نمونه! اگر حل کردی خیلی کارت درسته!

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم: $(\frac{3}{x})^2+(\frac{3}{x+2})^2=10$

حالا از اتحاد $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$(\frac{3}{x}-\frac{3}{x+2})^2+2(\frac{3}{x})(\frac{3}{x+2})=10$$

حالا دلیل اینکه چرا از این اتحاد استفاده کردیم و از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده نمی‌کنیم را در زیر می‌بینید:

$$\Rightarrow \text{معادله}=(\frac{3x+6-3x}{x(x+2)})^2+\frac{18}{x(x+2)}=10$$

$$\Rightarrow (\frac{6}{x(x+2)})^2+\frac{18}{x(x+2)}=10$$

$$\xrightarrow{\frac{6}{x(x+2)}=t(*)} t^2+3t-10=0$$

$$\Rightarrow (t+5)(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-5 \Rightarrow \frac{6}{x^2+2x}=-5 \\ t=2 \Rightarrow \frac{6}{x^2+2x}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x^2+10x+6=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{جواب ندارد.} \\ x^2+2x=3 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر ۲- است.

دقت کنید اگر از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده می‌کردید نمی‌توانستید از روش تغییر متغیر، مسئله را حل کنید.