پاسخنامه هایپر تست فصل پنجم

۱. گزینه‌ی «۱»

$$(g-f)(x)=\frac{x^{۳}-x^{۲}-\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{x^{۳}-x^{۲}-۱}=\frac{x^{۳}-x^{۲}-۱}{x^{۳}-x^{۲}-۱}=۱$$

پس تابع $g-f$ تابع ثابت است. چون f در بازه‌ی I صعودی است پس $(-f)$ نزولی است. از آنجا که $g-f$ ثابت است باید g صعودی باشد. تا جمع توابع g و $(-f)$ ثابت باشد.

۲. گزینه‌ی «۲»

در تابع دو ضابطه‌ای، اول یک‌به‌یک بودن هر ضابطه را با توجه به دامنه‌اش بررسی می‌کنیم. پس با توجه به عبارت $x^{۲}+۱$ در گزینه‌های «۳» و «۴» و یک‌به‌یک نبودن این عبارت (هم در $x\in\mathbb{Z}$ و هم در $x\notin\mathbb{Z}$)، این گزینه‌ها رد می‌شوند.

حالا بریم سراغ قسمت قشنگ داستان این تست:

گزینه‌ی «۱»: در ضابطه‌ی بالا وقتی $x\notin Q$، $x^{۳}$ هم می‌تواند عضو Q باشد، هم می‌تواند نباشد. حالا به ضابطه‌ی پایین نگاه کنید. $x\in Q$ است، پس $x+۱$ هم عضو Q است. پس به هر حال یک عرضی می‌توان پیدا کرد که $x^{۳}$ و $x+۱$ با هم برابر باشند و این یعنی یک‌به‌یک نبودن تابع. می‌توانید با مثال نقض هم این گزینه را رد کنید. در $x=\sqrt[۳]{۲}$ در ضابطه‌ی بالا و $x=۱$ در ضابطه‌ی پایین عرض تابع یکسان است، پس یک‌به‌یک نیست.

گزینه‌ی «۲»: در ضابطه‌ی بالا چون $x\in Q$، پس $x^{۳}\in Q$. اما در ضابطه‌ی پایین $x\notin Q$، پس $x+۱\notin Q$. بنابراین نمی‌توان دو نقطه با طول‌های متفاوت روی نمودار پیدا کرد به طوری‌که عرض آن‌ها یکسان باشد، پس یک‌به‌یک است. از این شیوه می‌توانستید برای رد گزینه‌های «۳» و «۴» هم استفاده کنید.

۳. گزینه‌ی «۴»

اولاً دامنه باید متقارن باشد، پس: $a=-۱$

حالا با کمک ویژگی‌های براکت، تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=[\frac{x-۱+۱}{x-۱}]+[\frac{b}{x+۱}]=[۱+\frac{۱}{x-۱}]+[\frac{b}{x+۱}]$$

$$=۱+[\frac{۱}{x-۱}]+[\frac{b}{x+۱}]$$

در تابع زوج، $f(-x)=f(x)$ است، پس:

$$۱+[\frac{۱}{-x-۱}]+[\frac{b}{-x+۱}]=۱+[\frac{۱}{x-۱}]+[\frac{b}{x+۱}]$$

$$\Rightarrow[\frac{-۱}{x+۱}]+[\frac{-b}{x-۱}]=[\frac{۱}{x-۱}]+[\frac{b}{x+۱}]$$

$$\Rightarrow b=-۱\Rightarrow(a,b)=(-۱,-۱)$$

۴. گزینه‌ی «۳»

با توجه به روش محاسبه‌ی دامنه‌ی لگاریتم داریم:

$$\begin{cases}f(x^{۲})-f(x+۶)>۰\\ f(x)>۰ \quad \text{همواره برقرار}\\ f(x)\neq۱\Rightarrow x\neq۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x^{۲})>f(x+۶)\xrightarrow{\text{چون } f \text{ نزولی است}}x^{۲}<x+۶\\ x\in\mathbb{R}\\ x\neq۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}-x-۶<۰\Rightarrow-۲<x<۳\\ x\in\mathbb{R}\\ x\neq۰\end{cases}\Rightarrow x\in(-۲,۳)-\{۰\}$$

پس دامنه شامل ۳ عضو صحیح است.

۵. گزینه‌ی «۱»

ابتدا دامنه را می‌یابیم:

$$۳-۲[x]-[x]^{۲}\geq۰\Rightarrow[x]^{۲}+۲[x]-۳\leq۰$$

$$([x]-۱)([x]+۳)\leq۰\Rightarrow-۳\leq[x]\leq۱$$

$$\Rightarrow[x]=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$$

با توجه به مقادیر $[x]$ برد تابع برابر است با:

$$[x]=-۳:y=۰\ ,\ [x]=-۲:y=\sqrt{۳}$$

$$[x]=-۱:y=۲\ ,\ [x]=۰:y=\sqrt{۳}\ ,[x]=۱:y=۰$$

پس برد تابع شامل ۲ عدد صحیح است.

۶. گزینه‌ی «۳»

$$f(\frac{x}{x^{۲}+x+۱})=x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f(\frac{۱}{\frac{x^{۲}+x+۱}{x}})=x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{x+\frac{۱}{x}+۱})=(x-\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})\ (*)$$

با فرض $x+\frac{۱}{x}=t$ داریم:

$$(x-\frac{۱}{x})^{۲}=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۴\Rightarrow(x-\frac{۱}{x})^{۲}=t^{۲}-۴$$

$$\Rightarrow x-\frac{۱}{x}=\pm\sqrt{t^{۲}-۴}$$

در نتیجه با قرار دادن این رابطه‌ها در (*) داریم:

$$f(\frac{۱}{t+۱})=\pm\sqrt{t^{۲}-۴}\ (t)$$

حالا با فرض $x=\frac{۱}{t+۱}$ داریم:

$$t+۱=\frac{۱}{x}\Rightarrow\ t=\frac{۱}{x}-۱\Rightarrow f(x)=(\pm\sqrt{(\frac{۱}{x}-۱)^{۲}-۴})(\frac{۱}{x}-۱)$$

۷. گزینه‌ی «۱»

باید دامنه متقارن باشد، پس باید $x=-۱$ را از دامنه حذف کنیم. که این کار با ریشه‌ی مخرج کردن $x=-۱$ در ضابطه‌ی پایین تابع، حاصل می‌شود:

$$x+c=۰\xrightarrow{x=-۱}c=۱$$

از طرفی با تبدیل x به $-x$ در ضابطه‌ی بالا، باید قرینه‌ی ضابطه‌ی پایین حاصل شود:

$$-۲x^{۲}-x+۱=-\frac{ax^{۳}+۳x^{۲}+b}{x+۱}$$

$$\Rightarrow(-۲x^{۲}-x+۱)\ (x+۱)=-ax^{۳}-۳x^{۲}-b$$

$$\Rightarrow-۲x^{۳}-۳x^{۲}+۱=-ax^{۳}-۳x^{۲}-b\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۱\end{cases}$$

۸. گزینه‌ی «۲»

برای محاسبه‌ی $f^{-۱}(۱)$ چون ۱ طول روی تابع $f^{-۱}$ است، پس عرض روی تابع f است. بنابراین:

$$f(\frac{x}{x+۱})=۱ \Rightarrow g(x)=-۱ \Rightarrow x=g^{-۱}(-۱)$$

با توجه به ضابطه‌ی $g^{-۱}$:

$$g^{-۱}(-۱)=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۴}+۱})=۱ \Rightarrow f(\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۷}{۴}})=۱ \Rightarrow f(\frac{۳}{۷})=۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱)=\frac{۳}{۷}$$

۹. گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی $f^{-۱}$ برابر برد f است. پس برد f برابر $\mathbb{R}$ است. از طرفی دقت کنید که f باید یک‌به‌یک باشد. پس:

$$\lim_{x\to c^-} x^۳-۲x^۲=f(c)$$

$$\Rightarrow c^۳-۲c^۲=c-۲ \Rightarrow c^۲(c-۲)=c-۲ \xrightarrow{c\neq ۲} c^۲=۱$$

$$\Rightarrow c=\pm ۱$$

باید کم‌ترین مقدار c را قابل قبول در نظر بگیریم زیرا در غیر این‌صورت تابع یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین:

$$c=-۱ \Rightarrow f(c)=f(-۱)=-۳$$

۱۰. گزینه‌ی «۴»

$$-۳\le x<-۲:[x]=-۳ \Rightarrow f(x)=-۳+\sqrt{x+۳}$$

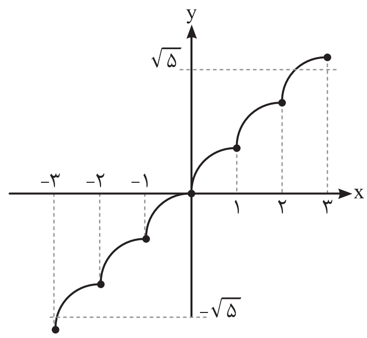
$$-۲\le x<-۱:[x]=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲+\sqrt{x+۲}$$

$$-۱\le x<۰:[x]=-۱ \Rightarrow f(x)=-۱+\sqrt{x+۱}$$

$$۰\le x<۱:[x]=۰ \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$$

$$۱\le x<۲:[x]=۱ \Rightarrow f(x)=۱+\sqrt{x-۱}$$

$$۲\le x<۳:[x]=۲ \Rightarrow f(x)=۲+\sqrt{x-۲}$$



حالا برای محاسبه‌ی $f^{-۱}(\sqrt{۵})$ و $f^{-۱}(-\sqrt{۵})$ داریم:

$$f^{-۱}(\sqrt{۵}):[x]+\sqrt{x-[x]}=\sqrt{۵} \xrightarrow[۲\le x<۳]{\text{با توجه به شکل}}$$

$$۲+\sqrt{x-۲}=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۲}=\sqrt{۵}-۲ \Rightarrow x-۲=(\sqrt{۵}-۲)^۲ \Rightarrow x=۱۱-۴\sqrt{۵}$$

$$f^{-۱}(-\sqrt{۵}):[x]+\sqrt{x-[x]}=-\sqrt{۵} \xrightarrow[-۳\le x<-۲]{\text{با توجه به شکل}}$$

$$-۳+\sqrt{x+۳}=-\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+۳}=۳-\sqrt{۵} \Rightarrow x+۳=(۳-\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow x=۱۱-۶\sqrt{۵}$$

بنابراین: $f^{-۱}(\sqrt{۵})-f^{-۱}(-\sqrt{۵})=(۱۱-۴\sqrt{۵})-(۱۱-۶\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵}$