پاسخنامه هایپر تست فصل ششم

۱. گزینه‌ی «۴»

با توجه به اینکه $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$، صورت و مخرج را در $\cos 10^\circ$ ضرب می‌کنیم و از رابطه‌ی $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\frac{1}{8}\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{8}$$

دقت کنید که: $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

۲. گزینه‌ی «۱»

ابتدا از رابطه‌ی $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$ داریم:

$$\cos^2(\frac{3\pi}{4} - x) = \frac{1+\cos(\frac{3\pi}{2} - 2x)}{2} = \frac{1-\sin 2x}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{3}$$

حالا حاصل عبارت را می‌یابیم:

$$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)^3 - 3(\tan x + \cot x)$$

$$= (\frac{2}{\sin 2x})^3 - 3(\frac{2}{\sin 2x}) = (\frac{2}{\frac{2}{3}})^3 - \frac{6}{\frac{2}{3}} = 27 - 9 = 18$$

۳. گزینه‌ی «۱»

از روابط $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$(\frac{1-\cos 2x}{2})^5 + (\frac{1+\cos 2x}{2})^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2x$$

اگر از روابط بسط دو جمله‌ای استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{2 + 20\cos^2 2x + 10\cos^4 2x}{32} = \frac{29}{16}\cos^4 2x$$

$$\Rightarrow 24\cos^4 2x - 10\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{درجه‌ی دوم}]{\text{حل معادله‌ی}} \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۴. گزینه‌ی «۴»

برای راحتی کار کمان‌ها را برحسب درجه می‌نویسیم:

$$\text{عبارت} = \frac{1}{\cos 36^\circ} - \frac{1}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ - \cos 36^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}$$

$$= \frac{-2\sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ} \xrightarrow[\sin 18^\circ = \cos 72^\circ]{\sin 54^\circ = \cos 36^\circ} \text{عبارت} = -2$$

۵. گزینه‌ی «۴»

از رابطه‌ی $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1+\cos(2x+2\alpha)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos(2x+2\alpha)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x - \cos(2x+2\alpha) = 1$$

حالا از روابط تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow -2\sin(2x+\alpha)\sin(-\alpha) = 1 \Rightarrow \sin(2x+\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

برای اینکه معادله برقرار باشد باید:

$$-1 \le \frac{1}{2\sin\alpha} \le 1 \Rightarrow \alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$$

پس بزرگترین بازه‌ی قابل قبول برای α ، طولی برابر $\frac{2\pi}{3}$ دارد.

۶. گزینه‌ی «۲»

اگر $x = \sin\alpha$ آنگاه $\sqrt{1-x^2} = \cos\alpha$ خواهد بود. بنابراین:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3(1-x)^2} = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$$

بنابراین حاصل عبارات داده شده برابر است با:

$$\tan(\frac{\pi}{3} - \cos^{-1}(\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}))) = \tan(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{6})$$

$$= \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

۷. گزینه‌ی «۴»

$$\frac{2(1+\sin^3 x)}{2 - 2\sin x\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin^3 x}{1 - \sin x\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow (1 - \sin x\cos x)(\sin x + \cos x) = 1 + \sin^3 x$$

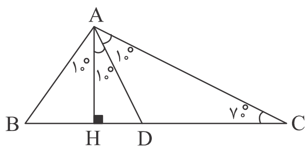
$$\Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)(\sin x + \cos x) = 1 + \sin^3 x$$

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = 1 + \sin^3 x$$

$$\Rightarrow \cos^3 x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

۸. گزینه‌ی «۱»

زاویه‌ی A را به سه زاویه‌ی 10° تقسیم می‌کنیم:



در مثلث ADC داریم:

$$\frac{AD}{\sin\hat{C}} = \frac{DC}{\sin D\hat{A}C} \Rightarrow \frac{AD}{\sin 70^\circ} = \frac{DC}{\sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow AD\sin 10^\circ = DC\sin 70^\circ \quad (*)$$

از طرفی در مثلث AHD داریم:

$$\frac{AD}{\sin A\hat{H}D} = \frac{HD}{\sin D\hat{A}H} \Rightarrow \frac{AD}{\sin 90^\circ} = \frac{HD}{\sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow AD\sin 10^\circ = HD \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} HD = DC\sin 70^\circ 0/ = 94DC \quad (1)$$

از طرفی مثلث ABD متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$BH = HD \qquad (2)$$

$$\frac{HC}{BH} = \frac{HD + DC}{HD} \stackrel{(2),(1)}{=\!=} \frac{0/94DC + DC}{0/94DC}$$

$$= \frac{1/94}{0/94} = \frac{194}{94} = \frac{97}{47}$$

۹. گزینه‌ی«۲»

عبارت را در $(-2\sin\frac{\pi}{7})$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{-2\sin\frac{\pi}{7}}$$

حالا از روابط تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(\sin\frac{\pi}{7} - \cancel{\sin\frac{3\pi}{7}}) + (\cancel{\sin\frac{3\pi}{7}} - \cancel{\sin\frac{5\pi}{7}}) + (\cancel{\sin\frac{5\pi}{7}} - \sin\pi)}{-2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{7} - \cancel{\sin\pi}}{-2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{-2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}$$

۱۰. گزینه‌ی«۲»

با توجه به اینکه $\tan^2 x = \tan^2 |x|$ داریم:

$$\frac{\sin^2|x|}{\cos^2|x|} = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|} \Rightarrow \frac{1-\cos^2|x|}{1-\sin^2|x|} = \frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\xrightarrow[1-\sin|x|\neq 0]{1-\cos|x|=0} \frac{1+\cos|x|}{1+\sin|x|} = 1 \Rightarrow \sin|x| = \cos|x|$$

$$\tan|x| = 1 \Rightarrow \begin{cases}\tan|x| = 1\\ 1-\cos|x| = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}|x| = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \pm(k\pi + \frac{\pi}{4})\\ \cos|x| = 1 \Rightarrow |x| = 2k\pi \Rightarrow x = \pm 2k\pi\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in[-2\pi,2\pi]} \begin{cases}x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}\\ x = \pm 2\pi, 0\end{cases}$$

پس معادله ۷ جواب دارد. دقت کنید که همه‌ی جواب‌ها در نامساوی $1-\sin|x|\neq 0$ صدق می‌کنند.