پاسخنامه هاپیر تست فصل هشتم

۱. گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}-1<[\sqrt{2}]\le\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}-1<[2\sqrt{2}]\le 2\sqrt{2}\\ \vdots\\ n\sqrt{2}-1<[n\sqrt{2}]<n\sqrt{2}\end{array}\right\}\text{جمع}$$

$$(1+2+\cdots+n)\sqrt{2}-n<[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]+\cdots+[n\sqrt{2}]\le(1+2+\cdots+n)\sqrt{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\sqrt{2}-n<[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]\cdots+[n\sqrt{2}]\le\frac{n(n+1)}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)-\frac{n}{n^2}<\frac{[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]+\cdots[n\sqrt{2}]}{n^2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{n^2+n}{n^2}$$

پس با توجه به قضیه‌ی فشردگی و با توجه به اینکه حاصل حدهای عبارت‌های چپ و راست نامعادلات مضاعف بالا $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، حد دنباله‌ی داده شده هم $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۲. گزینه‌ی «۱»

به ازای مقادیر مختلف n: $\sqrt[n]{2}\le\sqrt{2}$

به ازای مقادیر مختلف m: $\frac{1}{\sqrt[m]{2}}<1$

جمع : $\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[m]{2}}<1+\sqrt{2}$

۳. گزینه‌ی «۲»

تنها در حالتی که $-1<x<1$ است، دنباله‌ی $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا به عددی مثبت است. زیرا در این حالت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-3x^{n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{2-3(0)}{1+0}=2$$

پس در دنباله‌ی $\frac{x^n}{x^n+1}$ داریم: $\frac{x^n+1-1}{x^n+1}=1-\frac{1}{x^n+1}$

۱) اگر $0<x<1$: $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{x^n+1})=1-\frac{1}{0+1}=0$

از طرفی وقتی $0<x<1$ است، داریم:

x^n : نزولی $\Rightarrow \frac{1}{1+x^n}$ صعودی: $\Rightarrow 1-\frac{1}{1+x^n}$:نزولی

۲) اگر $-1<x<0$: $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{x^n+1})=0$

هم‌چنین وقتی $-1<x<0$ است، داریم:

x^n : غیر یکنوا $\Rightarrow 1-\frac{1}{1+x^n}$ غیر یکنوا

۴. گزینه‌ی «۳»

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(n)^2$$
$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\cdots+(n-1-n)(n-1+n)$$
$$=-(1+2+3+\cdots+n)=\frac{-n(n+1)}{2}$$

بنابراین:

$$a_n=-\frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

این دنباله همگرا به $-\frac{1}{2}$ است، از طرفی جملات اول و دوم دنباله به صورت زیر است:

$$a_1=-\frac{1}{2}\ ,\ a_2=-\frac{3}{5}$$

با توجه به جملات اول و دوم دنباله و عدد همگرایی آن، دنباله غیر یکنواست.

۵. گزینه‌ی «۱»

دنباله‌ی $\{\frac{n}{n+1}\}$ با مقادیر کمتر از یک به یک همگرا است. پس دنباله‌ی $\{\tan^{-1}(\frac{n}{n+1})\}$ با مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{4}$ همگرا است.

پس با توجه به نزولی بودن تابع cos، در ناحیه‌ی اول داریم:

$$\lim_{n\to\infty}[2\cos(2\tan^{-1}(\frac{n}{n+1}))]=[2\cos(\frac{\pi}{2}^{-})]$$
$$=[2\times(0^{+})]=0$$

۶. گزینه‌ی «۴»

ابتدا از رابطه‌ی $\sin x\cos=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n=\frac{\frac{1}{2}n(\sin\frac{n\pi}{2})}{n+1}$$

اگر n زوج باشد، $a_n=0$ می‌شود. پس به ازای nهای زوج، دنباله در بازه‌ی داده شده قرار ندارد.

اگر n به صورت $4k-3$ باشد $\sin\frac{n\pi}{2}=1$ است و داریم:

$$a_n=\frac{n}{2n+2}\Rightarrow\frac{4}{10}<\frac{n}{2n+2}<\frac{6}{10}$$

با توجه به اینکه حد دنباله $\frac{1}{2}$ است، داریم:

$$-\frac{1}{10}<\frac{n}{2n+2}-\frac{1}{2}<\frac{1}{10}\Rightarrow-\frac{1}{10}<\frac{-1}{2n+2}<\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow\left|\frac{-1}{2n+2}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow 2n+2>10\Rightarrow n>4\Rightarrow 4k-3>4\Rightarrow k\ge 2$$

اگر n به صورت $4k+3$ باشد، $\sin\frac{n\pi}{2}=-1$ است و جملات a_n منفی خواهند شد و مسلماً در بازه‌ی مورد نظر قرار ندارند. درنتیجه به ازای nهای $n=\{4k-3|k\ge 2\}$ دنباله در بازه‌ی $(0/4,0/6)$ قرار می‌گیرد. چون گزینه‌ی «۴» زیرمجموعه این مجموعه‌ی جواب است، پس جواب است.

۷. گزینه‌ی «۳»

$$a_n=\frac{n^2 2^n}{n!}=\frac{n^2 2^n}{n(n-1)(n-2)!}=(\frac{n^2}{n^2-n})(\frac{2^n}{(n-2)!})$$

دنباله‌ی $\frac{n^2}{n^2-n}$ همگرا به یک و دنباله‌ی $\frac{2^n}{(n-2)!}$ همگرا به صفر است. بنابراین دنباله‌ی a_n همگرا به صفر است. از طرفی:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^2.2^n}{n!}}=\frac{\frac{(n+1)^2\times 2^n\times 2}{(n+1)n!}}{\frac{n^2.2^n}{n!}}=\frac{2(n+1)}{n^2}$$

مقادیر این دنباله به ازای $n \geq ۳$، کمتر از ۱ است، بنابراین دنباله‌ی a_n غیر یکنوا است.

۸. گزینه‌ی «۳»

اولاً باید دنباله‌ی $\frac{an+b}{۲n+۱}$ به یک همگرا باشد: $\Rightarrow a=۲$

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲n+b}{۲n+۱}\right)^{۲n-۱} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{۲n+b}{۲n+۱}-۱\right)(۲n-۱)}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b-۱}{۲n+۱}\right)(۲n-۱)} = e^{b-۱}$$

از آنجا که دنباله همگرا به $e^۴$ است داریم:

$$b-۱=۴ \Rightarrow b=۵ \Rightarrow a-b=-۳$$

۹. گزینه‌ی «۲»

$$\Rightarrow b_n = \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{\cancel{(n+۱)}\,\cancel{n}!}{\cancel{(n+۱)}\,(n+۱)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+۱)^n}$$
$$\Rightarrow b_n = \left(\frac{n}{n+۱}\right)^n = \left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^n$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\cancel{۱}-\frac{۱}{n+۱}-\cancel{۱})^n}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+۱}} = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

دنباله‌ی فوق همگرا به $\frac{۱}{e}$ است. جمله‌ی اول دنباله‌ی b_n برابر $\frac{۱}{۲}$ است. چون $b_۱ > L$ است پس دنباله نزولی است.

۱۰. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{n!(۱+۲+\cdots+۲^{n-۱})}{۲\times۴\times\cdots\times۲n} = \frac{n!\left(\frac{۱\times(۱-۲^n)}{۱-۲}\right)}{۲(۱)\times۲(۲)\times\cdots\times۲(n)}$$
$$= \frac{n!(۲^n-۱)}{۲^n\times n!} = \frac{۲^n-۱}{۲^n} = ۱-\frac{۱}{۲^n}$$

دنباله‌ی فوق صعودی و همگرا به یک است.