پاسخنامه هایپر تست فصل نهم

۱. گزینه‌ی «۳»

تابع $y=\sin x+\cos x$ تنها در ناحیه‌ی اول مقادیری بزرگتر از یک دارد. با این فرض طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^{۲}=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۱۶}{۹}$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۷}{۹}\Rightarrow \sin ۲x-\frac{۷}{۹}=۰$$

حالا از قضیه‌ی مقدار میانی استفاده می‌کنیم. در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{۴})=۱-\frac{۷}{۹}=\frac{۲}{۹}>۰ \\ f(\frac{۳\pi}{۸})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۷}{۹}<۰ \end{cases} \xrightarrow{f(\frac{\pi}{۴})f(\frac{۳\pi}{۸})<۰} \text{ریشه در این بازه است}$$

۲. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{۲x}{۱+x^{۲}}=\frac{۲}{\frac{۱+x^{۲}}{x}}=\frac{۲}{\frac{۱}{x}+x}$$

می‌دانیم اگر $x<۰$: $x+\frac{۱}{x}<-۲$

$$\Rightarrow ۰>\frac{۱}{x+\frac{۱}{x}}>-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰>\frac{۲}{x+\frac{۱}{x}}>-۱$$

$$\Rightarrow [\frac{۲}{x+\frac{۱}{x}}]=[\frac{۲x}{x^{۲}+۱}]=-۱$$

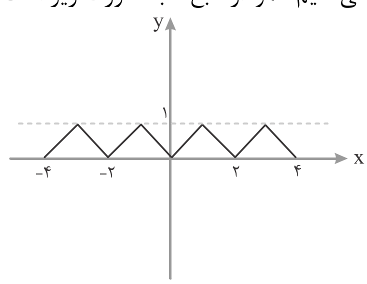
حالا حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۱-x(-۱)}{|x+۱|}=\lim_{x\to -۱}\frac{x+۱}{|x+۱|}$$

حد چپ این عبارت ۱- و حد راست آن ۱ است. پس حد فوق وجود ندارد.

۳. گزینه‌ی «۴»

از رسم استفاده می‌کنیم. نمودار تابع f به صورت زیر است:



با توجه به شکل تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۴. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^{۲}+۲n}-n)=\lim_{n\to\infty}(n+۱-n)=۱$$

از طرفی چون در دنباله‌ی فوق، $a_۱=\sqrt{۳}-۱$ پس دنباله صعودی است (برای بررسی دقیق‌تر باید گویا کنید). بنابراین دنباله با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{n\to\infty}f(\sqrt{n^{۲}+۲n}-n)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=a=۲$$

۵. گزینه‌ی «۴»

از هم‌ارزی $\cos x \underset{x\to ۰}{\sim} ۱-\frac{x^{۲}}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\cos(\pi-\frac{\pi x^{۲}}{۲})}{۲x^{۴}-x^{۵}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos(\frac{\pi x^{۲}}{۲})}{۲x^{۴}-x^{۵}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{(\frac{\pi x^{۲}}{۲})^{۲}}{۲}}{۲x^{۴}-x^{۵}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\pi^{۲}x^{۴}}{۸}}{۲x^{۴}-x^{۵}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\pi^{۲}x^{۴}}{۸}}{۲x^{۴}}=\frac{\pi^{۲}}{۱۶}$$

در آخر از هم‌ارزی جمله‌ی کوچک‌تر استفاده کردیم.

۶. گزینه‌ی «۲»

ابتدا مجانب قائم را می‌یابیم:

$$۱-۲^{\frac{|x|-۱}{x-۲}}=۰\Rightarrow ۲^{\frac{|x|-۱}{x-۲}}=۱=۲^{۰}$$

مجانب‌های قائم: $\Rightarrow \frac{|x|-۱}{x-۲}=۰\Rightarrow |x|=۱\Rightarrow x=\pm ۱$

از طرفی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۱-۲^{\frac{|x|-۱}{x-۲}}}=\begin{cases} x\to +\infty: \lim\frac{۱}{۱-۲^{۱}}=-۱\Rightarrow y=-۱:\text{افقی} \\ x\to -\infty: \lim\frac{۱}{۱-۲^{-۱}}=۲\Rightarrow y=۲:\text{افقی} \end{cases}$$

۷. گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-۱}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x}=۱\ (*)$$

یک نکته‌ی مهم را فراموش نکنید. حاصل حد، یک عدد کاملاً مشخص است. مثلاً حاصل حد L است و L^- یا L^+ نیست. پس در محاسبه‌ی $[\lim_{x\to +\infty}f(x)]$ داریم: $[\lim_{x\to +\infty}f(x)]\xrightarrow{(*)}[۱]=۱$

اما در محاسبه‌ی حد $\lim_{x\to +\infty}[f(x)]$، چون lim بیرون براکت است، اول باید براکت را تعیین مقدار کنیم. برای تعیین مقدار هم باید بدانیم وقتی $x\to +\infty$، f با مقادیر بیشتر از یک به یک نزدیک می‌شود یا کم‌تر. چون وقتی $x\to +\infty$، صورت، کوچک‌تر از مخرج است بنابراین:

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)]=[۱^-]=۰$$

۸. گزینه‌ی «۴»

تابع fof را تشکیل می‌دهیم:

$$x\in Q: f(f(x))=f(\underbrace{x^{۳}}_{\in Q})=(x^{۳})^{۳}=x^{۹}$$

$$x\notin Q: f(f(x))=f(\underbrace{۲-x}_{\notin Q})=۲-(۲-x)=x$$

$$\Rightarrow fof(x)=\begin{cases} x^{۹} & x\in Q \\ x & x\notin Q \end{cases}\Rightarrow x^{۹}=x\Rightarrow x=۰,\pm ۱$$

پس تابع در این سه نقطه پیوسته است.

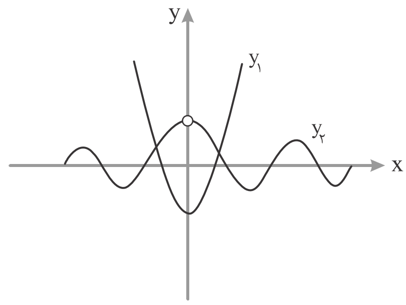
۹. گزینه‌ی «۳»

تابع f در $\mathbb{R}$ ناپیوسته است. پس برای یافتن نقاط پیوستگی تابع f.g باید ریشه‌های g را بیابیم. برای یافتن ریشه‌های g از رسم استفاده

می‌کنیم. فقط دقت کنید که $x=۰$ ریشه‌ی معادله‌ی $g(x)=۰$ است.

حالا داریم:

$$x^۵-x-\sin x=۰ \Rightarrow x(x^۴-۱)=\sin x$$
$$\Rightarrow \underbrace{x^۴-۱}_{y_۱}=\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{y_۲}$$



با توجه به نمودار، معادله دو ریشه دارد. هم‌چنین $x=۰$ هم ریشه‌ی معادله بود در نتیجه تابع g سه ریشه دارد و تابع $f.g$ در سه نقطه پیوسته است.

۱۰. گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=[x^۲-۲x]=[(x-۱)^۲-۱]=[(x-۱)^۲]-۱$$

پس f در $x=۱$ پیوسته است. حالا چون عبارت $y=(x-۱)^۲$ به ازای $x>۱$ صعودی است و چون f در فاصله‌ی $(۰,k)$ در یک نقطه ناپیوسته است داریم:

نقطه‌ی ناپیوستگی

x	۰	۱	a	k
y	۱	۰ ↗	۱ ↗	۲

$$\Rightarrow (k-۱)^۲=۲ \Rightarrow k-۱=\sqrt{۲} \Rightarrow k=۱+\sqrt{۲}$$