

## آزمون‌های جامع

## پاسخ نامه تشریحی

### پاسخ آزمون جامع فصل اول

#### ۱. گزینه‌ی «۳»

باید داده‌ای را حذف کنیم که نزدیک‌ترین فاصله رو به میانگین دارد، پس اول میانگین رو محاسبه می‌کنیم:

همون طور که می‌بینین میانگین، به عدد ۱۳ نزدیک‌تره. پس اگر ۱۳ رو حذف کنیم، تغییرات میانگین کم‌ترین خواهد بود.

#### ۲. گزینه‌ی «۱»

بدون شرح!

#### ۳. گزینه‌ی «۴»

دسته‌ی سوم (۲۶، ۲۱) است. پس طول دسته برابر ۵ است. از طرفی چون دامنه‌ی تغییرات ۳۵ است، پس:

$$\frac{\text{دامنه‌ی تغییرات}}{\text{طول دسته}} = \frac{۳۵}{۵} = ۷ = \text{تعداد دسته‌ها}$$

پس تعداد دسته‌ها ۷ تا است. حالا برای اینکه مرکز دسته‌ی آخر رو حساب کنیم، اول کران بالای دسته‌ی آخر رو محاسبه می‌کنیم و بعد ارزش نصف طول دسته رو کم می‌کنیم:

$$۴ \times (\text{طول دسته}) + \text{کران بالای دسته‌ی سوم} = \text{کران بالای دسته‌ی آخر (هفتم)}$$

$$۴۶ = ۴(۵) + ۲۶ = \text{کران بالای دسته‌ی آخر (هفتم)}$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دسته‌ی آخر} = ۴۶ - \frac{۵}{۲} = ۴۳/۵$$

#### ۴. گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\text{فراوانی دسته‌ی سوم}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{a}{9+a} \Rightarrow \frac{۳/۶ + ۰/۴a}{a} = a \Rightarrow ۳/۶ = ۰/۶a \Rightarrow a = ۶$$

پس میانگین با توجه به رابطه  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$  برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{(۲ \times ۱) + (۳ \times ۲) + (۶ \times ۳) + (۴ \times ۴)}{۱۵} = \frac{۴۲}{۱۵} = \frac{۱۴}{۵} = ۲/۸$$

#### ۵. گزینه‌ی «۴»

مساحت مکعب به طول یال  $a$  برابر  $۶a^۲$  است. چون طول یال ۲ است، پس مدلش  $a = ۲ + E$  است و مدل مساحتش به صورت زیر است:

$$S = ۶(۲ + E)^۲ = ۶(۴ + ۴E + E^۲) = ۲۴ + ۲۴E + ۶E^۲$$

$$\Rightarrow S \approx ۲۴ + ۲۴E$$

#### ۶. گزینه‌ی «۱»

طول میله ۸ است، یعنی فراوانی مطلقش ۸ است. پس:

$$\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{۸}{n} \Rightarrow \frac{۰/۴}{n} \Rightarrow n = ۲۰$$

از طرفی می‌دونیم مجموع فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است، در نتیجه:

$$۰/۱ + ۰/۲۵ + ۰/۴ + x = ۱ \Rightarrow x = ۰/۲۵$$

$$\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{f_۴}{۲۰} \Rightarrow \frac{۰/۲۵}{۲۰} = \frac{f_۴}{۲۰}$$

$$\Rightarrow f_۴ = ۵$$

#### ۷. گزینه‌ی «۳»

اصلاحیه: عدد ماشین حساب در صورت سوال ۰/۴۴۱ است.

$$x = [۰/۴۴۱ \times ۲۵] + ۶ = ۱۷$$

#### ۸. گزینه‌ی «۳»

چون واریانس داده‌ها صفره، پس داده‌ها باهم برابرند:

$$x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = x_۵$$

با توجه به تساوی بالا،

داده‌های ۴ +  $x_۵$ ، ۳ +  $x_۴$ ، ۲ +  $x_۳$ ، ۱ +  $x_۲$ ،  $x_۱$  را به صورت ۴ +  $x_۱$ ، ۳ +  $x_۱$ ، ۲ +  $x_۱$ ، ۱ +  $x_۱$ ،  $x_۱$  در نظر می‌گیریم و از همه‌ی اونها  $x_۱$  واحد کم می‌کنیم (واریانس تغییر نمی‌کنه). پس باید واریانس داده‌های ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ رو محاسبه کنیم. چون ۵ داده‌ی صحیح متوالی‌اند، پس واریانس اونها برابر ۲ است.

#### ۹. گزینه‌ی «۴»

$$\frac{۴}{n} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته‌ی دوم}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \Rightarrow \frac{۰/۲}{n} = \frac{۴}{n}$$

$$\Rightarrow n = ۲۰$$

$$\frac{\text{فراوانی مطلق دسته‌ی سوم}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{\text{فراوانی نسبی دسته‌ی سوم}}{۲۰}$$

$$\Rightarrow z = \frac{۵}{۲۰} = ۰/۲۵$$

چون مجموع کل فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است، پس:

$$y + ۰/۲ + z = ۱ \Rightarrow y = ۰/۵۵$$

#### ۱۰. گزینه‌ی «۳»

برای اینکه مد داشته باشیم باید  $x$  برابر یکی از داده‌های معلوم باشه. از طرفی چون میانگین، میانه و مد باهم برابرند،  $x$  نمی‌تونه ۱۱۰ یا ۶۰ باشه، چون در این صورت میانه که داده‌ی وسطه با مد برابر نمی‌شه. حالا دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$(۱) x = ۷۰: \begin{cases} \text{مد} = ۷۰ \\ \text{میانه} = ۷۰ \end{cases}$$

$$\text{میانگین} = \frac{۶۰ + ۷۰ + ۷۰ + ۸۰ + ۱۱۰}{۵} = \frac{۳۹۰}{۵} = ۷۸$$

این سه تا برابر نشدن.

$$(۲) x = ۸۰: \begin{cases} \text{مد} = ۸۰ \\ \text{میانه} = ۸۰ \end{cases}$$

$$\text{میانگین} = \frac{۶۰ + ۷۰ + ۸۰ + ۸۰ + ۱۱۰}{۵} = ۸۰$$

#### ۱۱. گزینه‌ی «۳»

جمع کل فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است:

$$۰/۲ + x + y + ۰/۳ = ۱ \Rightarrow x + y = ۰/۵ \quad (*)$$

میانگین برابر ۴/۸ است:

$$۲(۰/۲) + ۳x + ۵y + ۷(۰/۳) = ۴/۸$$

$$\alpha = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته‌ی سوم}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \times 2\pi = \frac{4}{20} \times 2\pi = \frac{2\pi}{5}$$

$$\xrightarrow{(*)} S = \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

۱۸. گزینه‌ی «۳»

جدول مربوط به نمودار رو می‌نویسیم.

$x_i$	۲	۳	۵	۶
$f_i$	۳	۴	۳	۲

تعداد داده‌ها ۱۲ و زوج، پس میانگین داده‌ی ششم و هفتم، برابر میانه

است، بنابراین:  $\text{میانه} = \frac{۳+۳}{۲} = ۳$

از طرفی:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{۶+۱۲+۱۵+۱۲}{۱۲} = \frac{۴۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

$$\Rightarrow \text{میانه} + \text{میانگین} = ۳ + ۳/۷۵ = ۶/۷۵$$

۱۹. گزینه‌ی «۲»

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = ۱۰۸$$

از طرفی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{۱۰۸}{۱۲} - \left(\frac{\sum x_i}{۱۲}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = ۹ - \left(\frac{\sum x_i}{۱۲}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(\sum x_i)^2}{۱۴۴} = ۹ - \sigma^2 \Rightarrow (\sum x_i)^2 = ۱۴۴(۹ - \sigma^2)$$

مجموع داده‌ها زمانی ماکزیمم که  $\sigma^2$  مینیمم باشد. مینیمم  $\sigma^2 = ۰$  است، پس:

$$(\sum x_i)^2 = ۹ \times ۱۴۴ \Rightarrow \sum x_i = ۳ \times ۱۲ = ۳۶$$

۲۰. گزینه‌ی «۴»

اگر  $a$  بزرگ‌ترین داده باشد:  $R = a - (-۲) = ۱۵ \Rightarrow a = ۱۳$

اگر  $a$  کوچک‌ترین داده باشد:  $R = ۱۰ - a = ۱۵ \Rightarrow a = -۵$

$$\Rightarrow 3x + 5y = 2/3 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} y = ۰/۴, x = ۰/۱ \Rightarrow y - x = ۰/۳$$

۱۲. گزینه‌ی «۱»

فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر برابر تعداد کل داده‌هاست، پس:

$$F_5 = y = ۲۵ \Rightarrow \frac{F_5}{F_3} = \frac{۲۵}{۱۵} = \frac{۵}{۳}$$

۱۳. گزینه‌ی «۲»

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه‌ی تغییرات}}{\text{تعداد دسته}} \Rightarrow x = \frac{۷۲}{x+۶}$$

$$x^2 + 6x - 72 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-6) = 0 \Rightarrow x = ۶$$

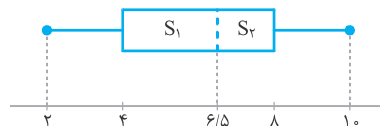
۱۴. گزینه‌ی «۱»

می‌خواهیم چارک‌ها رو محاسبه کنیم. پس اول داده‌ها رو مرتب می‌کنیم:

$$۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸, ۸, ۱۰$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $Q_1$   $\text{میانه} = ۶/۵$   $Q_3$

پس نمودار جعبه‌ای داده‌ها به صورت زیره:



پس نسبت  $S_1$  به  $S_2$  رو باید حساب کنیم. چون عرض مستطیل‌ها یکسانه، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت طول مستطیل‌هاست:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{۶/۵ - ۴}{۸ - ۶/۵} = \frac{۲/۵}{۱۷/۵} = \frac{۲}{۱۷}$$

۱۵. گزینه‌ی «۱»

مجموع مجذور ۳ داده‌ی آماری  $\{x_1, x_2, x_3\}$  برابر ۲۷۰ است:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = ۲۷۰$$

میانگین چهار داده  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  برابر ۸ است:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ۵}{۴} = ۸ \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = ۲۷$$

حالا انحراف معیار داده‌های  $\{x_1, x_2, x_3\}$  رو حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{۲۷۰}{۳} - \left(\frac{۲۷}{۳}\right)^2 = ۹۰ - ۸۱ = ۹ \Rightarrow \sigma = ۳$$

۱۶. گزینه‌ی «۱»

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = ۳۰ \Rightarrow f_4 = ۳۰$$

فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر برابر تعداد کل داده‌هاست:

$$\Rightarrow n = F_5 = ۴۲$$

$$\text{فراوانی مطلق دسته‌ی آخر} : f_5 = F_5 - F_4 = ۴۲ - ۳۰ = ۱۲$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی آخر} = \frac{f_5}{n} = \frac{۱۲}{۴۲} = \frac{۲}{۷}$$

۱۷. گزینه‌ی «۲»

مساحت قطاع مربوط به زاویه‌ی  $\alpha$  تو نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \alpha \Rightarrow S = \frac{1}{2} (1)^2 \alpha = \frac{\alpha}{۲}$$

پس باید  $\alpha$  رو حساب کنیم (برحسب رادیان):