آزمون‌های جامع
پاسخ‌نامه تشریحی

سؤال ۲۳. با توجه به تعریف جدید کتاب، گزینه‌ی صحیح وجود ندارد.
کلید سؤال ۲۹ گزینه‌ی «۴» است.

۱. گزینه‌ی «۴»

$f'(-۱)=-۲ \Rightarrow f'$ فرد است $\Rightarrow f$ زوج است.

$g'(-۱)=۳ \Rightarrow g'$ زوج است $\Rightarrow g$ فرد است.

حالا حاصل $(f+g)'(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(f+g)'(-۱)=f'(-۱)+g'(-۱)=-۲+۳=۱$$

۲. گزینه‌ی «۳»

$$y=\frac{x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x^۲+۱+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

چون $x^۲+۱\geq ۱$ و می‌دانیم: $u\geq ۱\Rightarrow u+\frac{۱}{u}\geq ۲$.

بنابراین برد تابع داده شده به صورت $[۲,+\infty)$ است.

۳. گزینه‌ی «۱»:

$$y=f\left(\sqrt{f(x)}\right)\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}f'(\sqrt{f(x)})$$

$$\Rightarrow y'(-۱)=\frac{f'(-۱)}{۲\sqrt{f(-۱)}}f'(\sqrt{f(-۱)})\qquad (*)$$

با توجه به ضابطه‌ی f:

$$f(x)=x^۲+۳|x|\xrightarrow[|x|=-x]{\text{در همسایگی}-۱}f(x)=x^۲-۳x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(-۱)=۴\\ f'(x)=۲x-۳\Rightarrow f'(-۱)=-۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)}y'(-۱)=\frac{-۵}{۲\sqrt{۴}}f'\left(\sqrt{۴}\right)=-\frac{۵}{۴}f'(۲)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f'(x)=۲x-۳$, $f'(۲)=۱$ و در نتیجه:

$$y'(-۱)=-\frac{۵}{۴}(۱)=-\frac{۵}{۴}$$

۴. گزینه‌ی «۲»

در فاصله‌ی $(۰,\pi)$؛ $\sin x$ در فاصله‌ی $(۰,۱)$ تغییر می‌کند. پس با فرض $\sin x=t$:

$$y=۲t+\frac{۱}{t}\Rightarrow y'=۲-\frac{۱}{t^۲}=۰\Rightarrow t^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

فقط $t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ در فاصله‌ی $(۰,۱)$ قرار دارد، بنابراین:

$$t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow y=۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow y_{min}=۲\sqrt{۲}$$

دقت کنید که در همسایگی راست صفر و چپ π تابع به $+\infty$ می‌رود.

۵. گزینه‌ی «۳»:

اکیداً نزولی

$$y=\tan^{-۱}x-x\Rightarrow y'=\frac{۱}{۱+x^۲}-۱=\frac{۱-۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۰$$

$$\Rightarrow y=\tan^{-۱}x-x$$

هم‌چنین وقتی f نزولی باشد، $f^{-۱}$ نیز نزولی است. پس:

$$y=\underset{\ominus}{\underset{\downarrow}{f^{-۱}}}\times\underset{\ominus}{\underset{\downarrow}{o\,g}}\times(\tan^{-۱}\underset{\ominus}{\underset{\downarrow}{x}}-x)\rightarrow\ominus\Rightarrow \text{تابع اکیداً نزولی است}$$

چون اکیداً نزولی است پس یک‌به‌یک است.

۶. گزینه‌ی «۳»

وقتی از دو نقطه با عرض یکسان روی تابع درجه دوم، دو مماس رسم می‌شود، نقطه‌ی تقاطع این دو مماس روی محور تقارن سهمی است. چون در اینجا در $x=-۱$ همدیگر را قطع کرده‌اند بنابراین:

$$\text{محور تقارن}=-۱\Rightarrow -\frac{a}{۲}=-۱\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow y=x^۲+۲x+b$$

چون دو خط مماس رسم شده بر منحنی برهم عمودند، پس به مسأله با این دید نگاه می‌کنیم: «از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ دو خط مماس عمود بر هم بر منحنی $y=x^۲+۲x+b$ رسم کرده‌ایم، b را بیابید» پس با مسأله‌ی خط مماس خارج از منحنی سروکار داریم. چون عمود بودن و در نتیجه شیب آن‌ها اهمیت دارد بنابراین از روش دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\text{شیب}=m\\ \text{نقطه}=(-۱,۰)\end{matrix}\Rightarrow \text{خط مماس}=y=m(x+۱)$$

معادله‌ی تلاقی این خط با منحنی ریشه‌ی مکرر می‌دهد:

$$x^۲+۲x+b=mx+m\Rightarrow x^۲+(۲-m)x+b-m=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۰}۴-۴m+m^۲-۴(b-m)=۰\Rightarrow ۴+m^۲-۴b=۰$$

$$\Rightarrow m^۲=۴b-۴\Rightarrow m=\pm\sqrt{۴b-۴}$$

چون دو خط برهم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر ۱- است در نتیجه:

$$(\sqrt{۴b-۴})(-\sqrt{۴b-۴})=-۱\Rightarrow ۴b-۴=۱\Rightarrow b=\frac{۵}{۴}$$

۷. گزینه‌ی «۳»

$$f(x)=(x^۲-۱)(x-۲)\sin x\, f''(x)$$

چون در $x=۰$ عامل صفرشونده‌ی $\sin x$ داریم، برای مشتق‌گیری تنها از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=(x^۲-۱)(x-۲)\cos x\, f''(x)$$

$$\Rightarrow f'(۰)=(-۱)(-۲)(۱)f''(۰)\Rightarrow\frac{f'(۰)}{f''(۰)}=۲$$

۸. گزینه‌ی «۳»

$$y=\sin^۲x-\cos x+\frac{a}{۴}\Rightarrow y=(۱-\cos^۲x)-\cos x+\frac{a}{۴}$$

$$\Rightarrow y=-\cos^۲x-\cos x+\frac{a}{۴}+۱$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است. چون در اولین نقطه بعد از $x=۰$ این اتفاق رخ داده:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \ (x = 0) \\ \cos x = -1 \ (x = \pi) \\ \cos x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{-2} \ (x = \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

پس اولین نقطه بعد از $x = 0, x = \frac{2\pi}{3}$ است که تابع اکسترمم دارد بنابراین $\cos x = -\frac{1}{2}$ را در تابع قرار می‌دهیم. خروجی آن باید ۲ باشد:

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + 1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

۹. گزینه‌ی «۱»

چون دو خط رسم شده به موازات نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ هستند.

$$y' = 1 \Rightarrow -\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{y} \Rightarrow y = -x$$

در تابع $y = -x$ را قرار می‌دهیم:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} = 2 \Rightarrow 2\sqrt[3]{x^2} = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\xrightarrow{y=-x} y = \pm 1 \Rightarrow A\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} , \ B\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |AB| = 2\sqrt{2}$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

تابع مجانب افقی $y = 2$ دارد. بنابراین فاصله‌ی منحنی از خط مجانب برابر است با:

$$d = \left|\frac{2x^2 + x + 2}{x^2 + 1} - 2\right| \Rightarrow d = \left|\frac{x}{x^2 + 1}\right|$$

چون بیشترین فاصله را می‌خواهیم پس از d نسبت به x مشتق می‌گیریم، (بدون در نظر گرفتن قدرمطلق)

$$d'_x = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow d_{max} = \left|\frac{\pm 1}{(\pm 1)^2 + 1}\right| = \left|\frac{\pm 1}{2}\right|$$

$$\Rightarrow d_{max} = \frac{1}{2}$$

۱۱. گزینه‌ی «۲»

چون عامل صفرشونده‌ی $(x - 1)^2$ داریم:

$$x \to 1^+ : f'(x) = 2(x - 1)\left[x^2 - 3x\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2\left[x^2 - 3x\right] \Rightarrow f''_+(1) = 2\left[(-2)^-\right] = -6$$

$$x \to 1^- : f'(x) = 2(x - 1)\left[x^2 - 3x\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2\left[x^2 - 3x\right] \Rightarrow f''_-(1) = 2\left[(-2)^+\right] = -4$$

پس:

$$f''_+(1) - f''_-(1) = -6 - (-4) = -2$$

دقت کنید چون مشتق عبارت داخل جزء صحیح در $x = 1$ عددی منفی است و حد داخل آن (-2) است پس:

$$\lim_{x \to 1^+} \left[x^2 - 3x\right] = \left[(-2)^-\right] = -3$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left[x^2 - 3x\right] = \left[(-2)^+\right] = -2$$

۱۲. گزینه‌ی «۱»

$$x \to 1^+ : f(x) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi(x - 1)) = \frac{1}{\pi}\sin \pi x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\pi}(\pi)\cos(\pi x - \pi) \Rightarrow f'_+(1) = 2$$

$$x \to 1^- : f(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi(x - 0))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\pi}(\pi)\cos \pi x \Rightarrow f'_-(1) = -1$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2 - (-1)}{1 + 2(-1)}\right| = 3$$

۱۳. گزینه‌ی «۱»

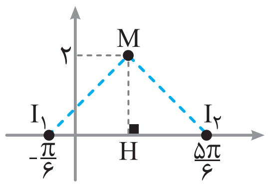
اکسترمم: $y' = \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

عطف:

$$y'' = -\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

مختصات اکسترمم: $M\begin{vmatrix} \frac{\pi}{3} \\ 2 \end{vmatrix}$ ، مختصات عطف: $I_1\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{6} \\ 0 \end{vmatrix}$ ، $I_2\begin{vmatrix} \frac{5\pi}{6} \\ 0 \end{vmatrix}$

پس مختصات نقاط به صورت زیر است:



$$S_{\overset{\triangle}{MI_1I_2}} = \frac{MH \times I_1I_2}{2} = \frac{2 \times \pi}{2} = \pi$$

۱۴. گزینه‌ی «۴»

شرط پیوستگی: $b = 1$

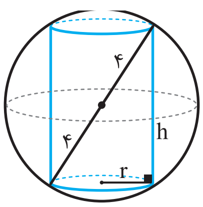
از طرفی:

$$\begin{cases} x < 0 : f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2 \Rightarrow f'_-(0) = -2 \\ x > 0 : f(x) = a\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = a\cos x - \sin x \\ \Rightarrow f'_+(0) = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -2 \Rightarrow a + b = -1$$

۱۵. گزینه‌ی «۲»

هدف مسأله ماکزیمم کردن حجم استوانه است:



$$V = \pi r^2 h \quad (*)$$

از طرفی: $h^2 + (2r)^2 = (8)^2$

$$\Rightarrow h^2 + 4r^2 = 64 \Rightarrow 4r^2 = 64 - h^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 16 - \frac{h^2}{4} \xrightarrow{(*)} V = \pi(16 - \frac{h^2}{4})h \qquad (**)$$

$$\Rightarrow V = \pi(16h - \frac{h^3}{4}) \Rightarrow V'_h = \pi(16 - \frac{3h^2}{4}) = 0$$

$$\Rightarrow h^{۲}=\frac{۶۴}{۳}\Rightarrow h=\frac{۸}{\sqrt{۳}}\xrightarrow{(**)}V_{max}=\pi(۱۶-\frac{\frac{۶۴}{۳}}{۴})(\frac{۸}{\sqrt{۳}})$$

$$\Rightarrow V_{max}=\pi(\frac{۱۲۸}{۱۲})(\frac{۸}{\sqrt{۳}})=\frac{۲۵۶\pi}{۳\sqrt{۳}}$$

۱۶. گزینه‌ی «۴»

از چپ به راست منحنی f یک عطف دارد که ابتدا تقعر رو به پایین و سپس رو به بالا دارد پس f' یک می‌نیمم دارد. بعد دوباره تابع f یک عطف با تقعر ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین دارد پس f' یک ماکزیمم دارد. در نهایت f یک نقطه‌ی اکسترمم (ماکزیمم) و یک عطف با خط مماس افقی دارد پس مشتق در این دو نقطه صفر است و در نتیجه f' دو ریشه دارد.

۱۷. گزینه‌ی «۱»

معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی مکرر می‌دهد:

$$x+۳=\frac{k}{x^{۲}}\Rightarrow x^{۳}+۳x^{۲}=k$$

برای اینکه معادله‌ی بالا ریشه‌ی مکرر بدهد باید ریشه‌ی مشتق در خود معادله صدق کند:

$$۳x^{۲}+۶x=۰\Rightarrow x=۰,x=-۲$$

$x=۰$ ریشه‌ی مخرج منحنی است پس قابل قبول نیست:

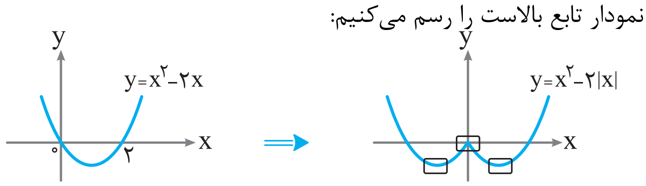
$$x=-۲:(-۲)^{۳}+۳(-۲)^{۲}=k\Rightarrow -۸+۱۲=k\Rightarrow k=۴$$

۱۸. گزینه‌ی «۲»

یک روش اینه که از مشتق کمک بگیریم. اما روش رسم نمودار هم هست:

$$y=x^{۲}-۲|x|\Rightarrow y=|x|^{۲}-۲|x|$$

پس اول نمودار $f(x)=x^{۲}-۲x$ و سپس نمودار $f(|x|)$ که همان نمودار تابع بالاست را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع سه نقطه‌ی بحرانی دارد.

۱۹. گزینه‌ی «۱»

چون $(۱,-۳)$ عطف پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند و طول آن مشتق دوم را صفر می‌کند:

$$f(x)=\frac{ax-b}{x^{۲}+۱}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(۱,-۳):-۳=\frac{a-b}{۲}\Rightarrow a-b=-۶\quad(*)\\ f'(x)=\frac{a(x^{۲}+۱)-۲x(ax-b)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\\ =\frac{ax^{۲}+a-۲ax^{۲}+۲bx}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{-ax^{۲}+۲bx+a}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\\ \Rightarrow f''(x)=\frac{(-۲ax+۲b)(x^{۲}+۱)^{۲}-۲(x^{۲}+۱)(۲x)(-ax^{۲}+۲bx+a)}{(x^{۲}+۱)^{۴}}\\ \Rightarrow f''(۱)=۰\Rightarrow(-۲a+۲b)(۴)-۸(-a+۲b+a)=۰\\ \Rightarrow -۸a+۸b=۱۶b\Rightarrow a=-b\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)}-۲b=-۶\Rightarrow b=۳\xrightarrow{a=-b}a=-۳$$

۲۰. گزینه‌ی «۴»

$$f'(x)=۱+\frac{-\sin x}{\cos x}=۱-\tan x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=۱-۱=۰$$

$$\Rightarrow f''(x)=-(۱+\tan^{۲}x)\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۴})=-۲<۰$$

پس این نقطه طول ماکزیمم نسبی تابع است.

۲۱. گزینه‌ی «۲»

چون x توان ۳ دارد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\frac{x}{۳}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۳}+y}{۴}\geq\sqrt[۴]{(\frac{x}{۳})(\frac{x}{۳})(\frac{x}{۳})y}$$

$$\Rightarrow\frac{۶}{۴}\geq\sqrt[۴]{\frac{x^{۳}}{۲۷}y}\Rightarrow\frac{x^{۳}y}{۲۷}\leq(\frac{۳}{۲})^{۴}$$

$$\Rightarrow x^{۳}y\leq۲۷(\frac{۸۱}{۱۶})\Rightarrow x^{۳}y\leq\frac{۲۱۸۷}{۱۶}$$

۲۲. گزینه‌ی «۴»

$$(gof)'(x)=f'(x)g'(f(x))\Rightarrow(gof)'(۲)=f'(۲)g'(f(۲))\quad(*)$$

با توجه به حد داده شده و تابع g و مشتق‌پذیر بودن g و f:

چون حد مخرج صفر می‌شود پس حد صورت هم صفر است:

$$\lim_{x\to۱}f(g(x))-۲=۰\Rightarrow f(\lim_{x\to۱}g(x))=۲$$

$$\xrightarrow{g(x)=x^{۳}+x}f(۲)=۲$$

از طرفی با هوپیتال‌گیری از حد:

$$\lim_{x\to۱}\frac{g'(x)f'(g(x))}{۲x}=۴\Rightarrow\frac{g'(۱)f'(g(۱))}{۲}=۴\qquad(**)$$

$$g(x)=x^{۳}+x\Rightarrow\begin{cases}g(۱)=۲\\ g'(x)=۳x^{۲}+۱\Rightarrow g'(۱)=۴\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(**)}\frac{۴f'(۲)}{۲}=۴\Rightarrow f'(۲)=۲$$

پس حاصل $(*)$ برابر است با:

$$(gof)'(۲)=۲g'(۲)$$

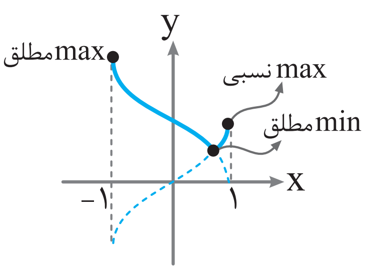
در نهایت با توجه به ضابطه‌ی g:

$$g'(x)=۳x^{۲}+۱\Rightarrow g'(۲)=۱۳$$

$$\Rightarrow(gof)'(۲)=۲(۱۳)=۲۶$$

۲۳. گزینه‌ی «۳»

شکل تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، تابع یک اکسترمم نسبی و دو اکسترمم مطلق دارد.

۲۴. گزینه‌ی «۱»

در نقطه‌ی تلاقی تابع با محور xها، $y=۰$ است. چون عرضِ روی تابع معکوس، طولِ روی تابع f است. بنابراین: $\qquad(*)\qquad$ مشتق $=\frac{۱}{f'(۰)}$

حالا باید از f در $x=۰$ مشتق بگیریم. چون در تابع f، عامل صفرشونده داریم پس تنها از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{-x}{2^{x+1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2^{x+1}} \Rightarrow f'(0)=\frac{-1}{2}$$

پس: $\text{مشتق}=\frac{1}{\frac{-1}{2}}=-2$

۲۵. گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{6}{25}x^{-\frac{4}{5}}+\frac{48}{25}x^{-\frac{9}{5}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{6}{25}x^{-\frac{9}{5}}(x+8)$$

در $x=0$ مشتق دوم موجود نیست و در $x=-8$ مشتق دوم، صفر است. چون توان هر دو فرد است در نتیجه مشتق دوم در هر دو نقطه تغییر علامت می‌دهد.

x		-8		0	
f''	$+$		$-$		$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

پس در بازه‌ی $(-8,0)$ تقعر تابع رو به پایین است.

۲۶. گزینه‌ی «۴»

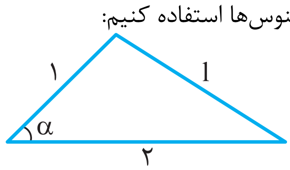
در همسایگی $x=0$ در تابع مشتق داریم:

x		0	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

پس f در $x=0$ مینیمم نسبی دارد. از طرفی چون $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=L,\ \lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty$ است در نتیجه این نقطه زاویه‌دار است. چون حداقل یکی از مشتق‌های چپ و راست بی‌نهایت نیست.

۲۷. گزینه‌ی «۱»

با توجه به شکل زیر، اگر از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده کنیم:



$$l^2=1+4-2(2)(1)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow l^2=5-4\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{5-l^2}{4}\quad (*)$$

از طرفی:

$$S=\frac{1}{2}(1)(2)\sin\alpha=\sin\alpha$$

از $(*)$ و با کمک رابطه‌ی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ داریم:

$$\sin^2\alpha+\left(\frac{5-l^2}{4}\right)^2=1\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{5-l^2}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{1-\left(\frac{5-l^2}{4}\right)^2} \Rightarrow S'_l=\frac{-2\left(\frac{5-l^2}{4}\right)\left(\frac{-2l}{4}\right)}{2\sqrt{1-\left(\frac{5-l^2}{4}\right)^2}}$$

$$\xrightarrow{l=\sqrt{7}} S'=\frac{-2\left(\frac{5-7}{4}\right)\left(-2\frac{\sqrt{7}}{4}\right)}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-2\frac{\sqrt{7}}{4}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

پس مساحت با سرعت $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$ کاهش می‌یابد.

۲۸. گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق برابر است با:

$$2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=-1\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

در $x=0$ و $x=-1$ عبارت $\sin\pi x$ عامل صفرشونده است پس تابع در این دو نقطه مشتق‌پذیر است پس f تنها در $x=\frac{1}{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۹. گزینه‌ی «۴»

اصلاحیه: گزینه‌ی «۴» درست است.

$$y=\cos\frac{2\pi}{x}+\sin\pi\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y'=\left(-\frac{2\pi}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{2\pi}{x}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\cos\pi\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y'(4)=\frac{2\pi}{4^2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\cos 2\pi=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{8}$$

۳۰. گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases}x\ge 1: y=x^2-x+5x^2\Rightarrow y=6x^2-x\\ x<1: y=-x^2+x+5x^2\Rightarrow y=4x^2+x\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}12x-1, & x>1\\ 8x+1, & x<1\end{cases}$$

در $x=1$ مشتق تغییر علامت نمی‌دهد.

$$\Rightarrow y''=\begin{cases}12, & x>1\\ 8, & x<1\end{cases}$$

در $x=1$ مشتق دوم هم تغییر علامت نمی‌دهد. پس $x=1$ نه اکسترمم است و نه عطف.

۳۱. گزینه‌ی «۳»

نقطه به طول ۲ روی f^{-1} است، یعنی: $\begin{vmatrix}2\\ a\end{vmatrix}\in f^{-1}$ در نتیجه:

$$\begin{vmatrix}a\\ 2\end{vmatrix}\in f\Rightarrow f(a)=2$$

با توجه به ضابطه‌ی f: $\Rightarrow a^2+ka=2\quad (*)$

هم‌چنین با توجه به اینکه $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{3}$ است، داریم:

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{3}\quad (**)$$

$f'(a)$ را با توجه به ضابطه‌ی f می‌یابیم:

$$f'(x)=2x+k\Rightarrow f'(a)=2a+k\xrightarrow{(**)}\frac{1}{2a+k}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2a+k=3\Rightarrow a=\frac{3-k}{2}$$

حالا با قرار دادن $a=\frac{3-k}{2}$ در رابطه‌ی $(*)$، k را محاسبه می‌کنیم:

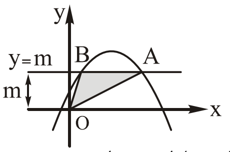
$$\left(\frac{3-k}{2}\right)^2+k\left(\frac{3-k}{2}\right)=2\Rightarrow\frac{9+k^2-6k}{4}+\frac{3k-k^2}{2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{۹+k^{۲}-۶k+۶k-۲k^{۲}}{۴}=۲\Rightarrow \frac{۹-k^{۲}}{۴}=۲$$

$$\Rightarrow ۹-k^{۲}=۸\Rightarrow k^{۲}=۱\Rightarrow k=\pm ۱$$

۳۲. گزینه‌ی «۲»

یک شکل از مساله رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل، مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}m(AB)$$

حالا باید AB را پیدا کنیم. نقاط A و B نقاط تقاطع خط و منحنی هستند، پس خط و منحنی را تلاقی می‌دهیم:

$$-x^{۲}+۲x+\frac{m}{۲}=m\Rightarrow x^{۲}-۲x+\frac{m}{۲}=۰\ (*)$$

اما طول AB ، در واقع تفاضل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم (*) است. بنابراین:

$$AB=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۴-۲m}}{۱}=\sqrt{۴-۲m}$$

پس با قرار دادن این مقدار در رابطه‌ی S:

$$S=\frac{۱}{۲}m\sqrt{۴-۲m}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴m^{۲}-۲m^{۳}}$$

$$\Rightarrow S'=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۸m-۶m^{۲}}{۲\sqrt{\square}}\right)=۰\Rightarrow m=\frac{۴}{۳}$$

۳۳. گزینه‌ی «۲»

$y=-۲$ عرض می‌نیمم نسبی تابع است، در نتیجه معادله‌ی تلاقی منحنی و خط $y=-۲$ ریشه‌ی مضاعف می‌دهد:

$$-۲=x-\sqrt{-x^{۲}+a}\Rightarrow x+۲=\sqrt{-x^{۲}+a}$$

طرفین به توان ۲: $(x+۲)^{۲}=-x^{۲}+a$

$$\Rightarrow x^{۲}+۴x+۴=-x^{۲}+a\Rightarrow ۲x^{۲}+۴x+۴-a=۰$$

برای اینکه معادله، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد باید:

$$\Delta=۰\Rightarrow ۱۶-۴(۲)(۴-a)=۰\Rightarrow ۴-a=۲\Rightarrow a=۲$$

پس تابع و در نتیجه دامنه‌اش به صورت زیر است:

$$y=x-\sqrt{-x^{۲}+۲}\Rightarrow \text{دامنه}: -x^{۲}+۲\geq ۰\Rightarrow -\sqrt{۲}\leq x\leq \sqrt{۲}$$

۳۴. گزینه‌ی «۳»

$x=۰$ طول نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری تابع است، چون مشتق در این نقطه ∞ است. پس ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است:

$$\Rightarrow a(۰)^{۲}+b(۰)+c=۰\Rightarrow c=۰$$

از طرفی براساس هم ارزی رادیکالی:

$$x-۱-\sqrt{ax^{۲}+bx}\underset{x\to\infty}{\sim}x-۱-\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

وقتی $x\to+\infty$ ، تابع مجانب افقی با عرض مثبت دارد، بنابراین:

$$x\to+\infty: x-۱-\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|=x-۱-\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{۲a}\right)$$

$$=(۱-\sqrt{a})x-۱-\frac{b}{۲\sqrt{a}}$$

چون تابع مجانب افقی دارد، باید ضریب x صفر باشد:

$$a=۱\Rightarrow y=-۱-\frac{b}{۲}\ \text{: مجانب افقی}$$

چون عرض این خط، مثبت است: $-۱-\frac{b}{۲}>۰\Rightarrow \frac{b}{۲}<-۱\Rightarrow b<-۲$

پس $b<-۲\,,\,a+c=۱$ است.

۳۵. گزینه‌ی «۴»

اول رابطه را مرتب کنیم: $\frac{xy^{۲}}{x+y^{۲}}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۵xy^{۲}=۴x+۴y^{۲}$

$$\Rightarrow f(x,y)=۵xy^{۲}-۴y^{۲}-۴x=۰\ (*)$$

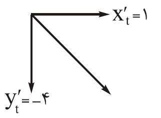
با عنایت به اینکه هنگامی که ذره در نقطه‌ی $(۱,۲)$ است، سرعت افزایش مولفه‌ی x، ۱ متر در ثانیه است: $x'_t=۱\ ,\ P(۱,۲)$

حالا از طرفین رابطه‌ی (*)، نسبت به زمان مشتق می‌گیریم (یک مشتق ضمنی معمولی می‌گیریم و تهش تو x'_t ضرب می‌کنیم).

$$y'_t=-\frac{۵y^{۲}-۴}{۱۰xy-۸y}\times x'_t$$

با قرار دادن اطلاعات مساله: $y'_t=-\frac{۵(۴)-۴}{۱۰(۱)(۲)-۸(۲)}\times ۱=-۴$

با توجه به سرعت x و y:



$$\Rightarrow \text{سرعت متحرک}=\sqrt{(-۴)^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۱۷}$$

پس ذره با سرعت $\sqrt{۱۷}$ در حال سقوط است.