

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{\gamma} [2a_1 + 4d] = 20 \Rightarrow a_1 + 2d = 4 \quad (*)$$

هم‌چنین چون $a_{14} = 14$ است:

$$\Rightarrow a_1 + 4d = 14 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2d = 10 \Rightarrow d = 5 \xrightarrow{(*)} a_1 = -6$$

۶. گزینه‌ی «۲»

مجموع جملات دوم و پنجم برابر ۱۸ است:

$$a_2 + a_5 = 18 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^4 = 18 \Rightarrow a_1 q(1 + q^3) = 18 \quad (*)$$

حاصل ضرب جملات اول تا سوم برابر ۸ است:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8 \Rightarrow a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 = 8 \Rightarrow a_1^3 q^3 = 8$$

$$\Rightarrow a_1 q = 2 \xrightarrow{(*)} 2(1 + q^3) = 18 \Rightarrow 1 + q^3 = 9 \Rightarrow q = 2$$

۷. گزینه‌ی «۱»

مجموع پنج جمله‌ی اول:

$$S = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d)$$

$$= 5a_1 + 10d$$

مجموع پنج جمله‌ی دوم:

$$S' = (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d) + (a_1 + 9d)$$

$$= 5a_1 + 35d$$

مجموع پنج جمله‌ی اول $\frac{1}{4}$ مجموع پنج جمله‌ی دوم است:

$$S = \frac{1}{4} S' \Rightarrow 5a_1 + 10d = \frac{1}{4} (5a_1 + 35d)$$

$$\Rightarrow 20a_1 + 40d = 5a_1 + 35d \Rightarrow 15a_1 = -5d$$

جمله‌ی اول برابر ۱۲ است:

$$15(12) = -5d \Rightarrow d = -36$$

۸. گزینه‌ی «۲»

$$a'_1 = 3a_1$$

جمله‌ی اول ۳ برابر شود:

$$q' = \frac{q}{\gamma}$$

قدرنسبت نصف شود:

$$\Rightarrow \frac{a'_6}{a_6} = \frac{a'_1 q'^5}{a_1 q^5} = \frac{3a_1 \left(\frac{q}{\gamma}\right)^5}{a_1 q^5} = \frac{3}{3^2}$$

۹. گزینه‌ی «۳»

چون جمله‌های اول، سوم و بیست‌ویکم یک دنباله‌ی عددی، جمله‌های متوالی دنباله‌ی هندسی‌اند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر است با:

$$q = \frac{21-3}{3-1} = \frac{18}{2} = 9$$

مجموع سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی ۱۸۲ است، بنابراین:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 182 \Rightarrow a_1 + 9a_1 + 81a_1 = 182$$

$$\Rightarrow 91a_1 = 182 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 q = 2 \times 9 = 18$$

۱۰. گزینه‌ی «۳»

$$a_6 = 14 \Rightarrow a_1 + 5d = 14 \quad (*)$$

مجموع ۱۱ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_{11} = \frac{11}{2} [2a_1 + 10d] = \frac{11}{2} [a_1 + 5d] = 11 \times 14 = 154$$

۱۱. گزینه‌ی «۲»

$$\text{مساحت دایره‌ی اول} : \pi(1)^2 = \pi$$

پاسخ آزمون جامع فصل دوم

۱. گزینه‌ی «۲»

$$a^2 = 3c \Rightarrow c = \frac{a^2}{3} \quad (*) \quad \text{تشکیل دنباله‌ی هندسی دادن: } a, c, 3$$

$$\frac{a+c}{2} = 3 \quad \text{تشکیل دنباله‌ی عددی دادن: } a, 3, c$$

$$\xrightarrow{(*)} a + \frac{a^2}{3} = 6 \Rightarrow a^2 + 3a - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3, a = -6$$

چون اعداد متمایزند $a = -6$ رو قبول می‌کنیم. پس: $c = \frac{36}{3} = 12$

$$\Rightarrow -6, 3, 12 \Rightarrow d = 9 \quad \text{جملات دنباله‌ی عددی}$$

۲. گزینه‌ی «۱»

$$a_2 + a_5 = 12 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^4 = 12 \Rightarrow a_1 q(1 + q^3) = 12 \quad (1)$$

$$a_8 - a_2 = 84 \Rightarrow a_1 q^7 - a_1 q = 84 \Rightarrow a_1 q(q^6 - 1) = 84 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{(2)}{(1)} = \frac{q^6 - 1}{q^3 + 1} = 7 \Rightarrow \frac{(q^3 - 1)(q^3 + 1)}{q^3 + 1} = 7 \Rightarrow q = 2$$

$$\xrightarrow{(1)} a_1(2)(1+8) = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$$

۳. گزینه‌ی «۳»

$$\frac{a_1}{1-q} = 20 \quad (*) \quad \text{حد مجموع جملات } 20 \text{ است:}$$

$$a_1 q = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{q} \quad \text{جمله‌ی دوم } 5 \text{ است:}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{5}{q - q^2} = 20 \Rightarrow 4q^2 - 4q + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2q-1)^2 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \xrightarrow{(*)} \frac{a_1}{\frac{1}{2}} = 20 \Rightarrow a_1 = 10$$

$$\Rightarrow \text{جمله‌ی چهارم} : a_4 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{4}$$

۴. گزینه‌ی «۲»

نسبت مجموع n جمله‌ی دوم به مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی همواره برابر q^n است. بنابراین:

$$\frac{\text{مجموع سه جمله‌ی دوم}}{\text{مجموع سه جمله‌ی اول}} = \frac{27}{8} = q^3 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

حالا با توجه به اینکه مجموع سه جمله‌ی اول ۸ است، جمله‌ی اول رو حساب می‌کنیم:

$$a_1 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{9}{4}a_1 = 8$$

$$a_1 \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = 8 \Rightarrow a_1 \left(\frac{19}{4}\right) = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{32}{19}$$

۵. گزینه‌ی «۴»

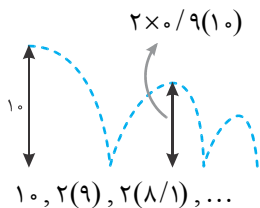
از رابطه‌ی $S_n - S_{n-1} = a_n$ داریم:

$$S_5 - S_4 = a_5 \xrightarrow{a_5=14} S_5 - S_4 = 14 \quad (1)$$

$$S_4 + S_5 = 26 \quad (2)$$

از طرفی:

$$\xrightarrow{\text{جمع (1) و (2)}} 2S_5 = 40 \Rightarrow S_5 = 20$$



پس کل مسافت طی شده توسط توپ برابر حد مجموع این جملات است:

$$10 + 2(9 + 8/1 + \dots) = 10 + 2\left(\frac{9}{1 - 0/9}\right) = 190$$

۱۷. گزینه ی «۳»

با توجه به جملات دنباله:

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_5 = a_2 + 3d \Rightarrow 4 + \frac{1}{2} = 3d \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

پس جمله ی اول برابر $2 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2$ است. پس:

$$S_{21} = \frac{21}{2} \left[2(-2) + 20\left(\frac{3}{2}\right) \right] = 21 \times 13 = 273$$

۱۸. گزینه ی «۳»

چون دنباله ی هندسی با قدرنسبت ۲ داریم پس:

$$a_1, 2a_1, 4a_1$$

با توجه به گزینه ها فقط گزینه ی (۳) شرایط تبدیل شدن به دنباله ی هندسی را دارد.

$$a_1 + 1, 2a_1 + 2, 4a_1 + 4$$

۱۹. گزینه ی «۳»

جملات دنباله را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می گیریم. چون این اعداد، اضلاع یک مثلث قائم الزاویه اند، بنابراین قضیه فیثاغورس برای آن ها صدق می کند:

$$\begin{aligned} (a-d)^2 + a^2 &= (a+d)^2 \\ \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 &= a^2 + d^2 + 2ad \\ \Rightarrow a^2 &= 4ad \Rightarrow a = 4d \Rightarrow \text{وتر} = a+d = 5d \end{aligned}$$

۲۰. گزینه ی «۴»

با توجه به جمله ی عمومی، جمله ی اول برابر ۱۵ و قدرنسبت برابر $-\frac{2}{3}$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{15\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{15\left(1 + \frac{32}{243}\right)}{\frac{5}{3}} = 9\left(1 + \frac{32}{243}\right) = \frac{275}{27} = 10\frac{5}{27} \end{aligned}$$

$$\text{مساحت دایره ی دوم: } \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

پس مساحت تمام دایره ها برابر است با:

$$\begin{aligned} \pi + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{16}\right) + \dots &= \pi + 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} + \dots\right) \\ &= \pi + 2\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \pi + 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

۱۲. گزینه ی «۴»

اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ به صورت $6k$ قابل نمایشند:

$$\begin{aligned} 100 < 6k < 200 &\Rightarrow \frac{100}{6} < k < \frac{200}{6} \\ 17 \leq k \leq 33 &\Rightarrow \begin{cases} \text{تعداد جملات} = 33 - 17 + 1 = 17 \\ \text{جمله ی اول} = 6 \times 17 = 102 \\ \text{جمله ی آخر} = 6 \times 33 = 198 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{17}{2} [102 + 198] = 2550$$

۱۳. گزینه ی «۱»

$$\text{درج واسطه ی حسابی: } d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{64-1}{5+1} = \frac{63}{6} = 10\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \text{جملات: } 1, 11\frac{5}{6}, 22, 32\frac{5}{6}, 43, 53\frac{5}{6}, 64$$

$$\text{درج واسطه ی هندسی: } q = n + \sqrt{\frac{b}{a}} = 6 + \sqrt{\frac{64}{1}} = 12$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{جملات: } 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \\ \Rightarrow A+B = 40\frac{5}{6} \end{aligned}$$

۱۴. گزینه ی «۲»

$$\frac{1+x+x^2+\dots}{\text{حد مجموع}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 1-x = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۱۵. گزینه ی «۳»

$$\begin{aligned} 1+5+9+\dots+x &= 231 \\ \Rightarrow \frac{n}{2} [2(1) + (n-1)4] &= 231 \\ \Rightarrow \frac{n}{2} [2+4n-4] &= 231 \\ \Rightarrow \frac{n}{2} [4n-2] &= 231 \Rightarrow 2n^2 - n = 231 \Rightarrow n=11 \end{aligned}$$

پس برای محاسبه ی X باید جمله ی یازدهم را حساب کنیم.

$$\Rightarrow x = a_1 + (11-1)d = 1 + 10(4) = 41$$

۱۶. گزینه ی «۳»

جملات دنباله ی مربوط به مسافت طی شده توسط توپ به صورت زیر است. (به شکل توجه کنید)