

پاسخ آزمون جامع فصل سوم

۱. گزینه‌ی «۴»

$$\log_a^4 \sqrt[3]{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt[3]{a}$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 3^2$$

طرفین به توان ۲:

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}} + 4) = \log_{\frac{1}{2}} 3^2 = 2$$

۲. گزینه‌ی «۳»

$$\log_x^{2x-k} + \log_x^2 = 2$$

$$\Rightarrow \log_x^{9x-3k} = 2 \Rightarrow x^2 = 9x - 3k$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 3k = 0$$

حاصل ضرب جواب‌ها برابر ۱۲ است، بنابراین:

$$\frac{c}{a} = 3k = 12 \Rightarrow k = 4$$

۳. گزینه‌ی «۳»

$$\log_{\Delta}^{28} = \frac{\log 28}{\log \Delta} = \frac{\log 4 \times 7}{1 - \log 2} = \frac{\log 4 + \log 7}{1 - \log 2}$$

$$= \frac{2 \log 2 + \log 7}{1 - \log 2} = \frac{2a + b}{1 - a}$$

۴. گزینه‌ی «۱»

با توجه به اینکه مبنا برابر ۵ است داریم:

$$5^3 < 2.04 < 5^4 \Rightarrow 3 < \log_5^{2.04} < 4 \Rightarrow \left[ \log_5^{2.04} \right] = 3$$

۵. گزینه‌ی «۳»

$$\log_{\lambda}^{18} = a \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^{3 \times 2} = a \Rightarrow \frac{1}{3} \log_{\frac{2}{3}}^{3 \times 2} = a$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^{3 \times 2} = 3a \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^{3^2} + \log_{\frac{2}{3}}^2 = 3a$$

$$\Rightarrow 2 \log_{\frac{2}{3}}^3 + 1 = 3a \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}^3 = \frac{3a-1}{2} (*)$$

حالا مقدار  $\log_{\frac{2}{3}}^6$  رو حساب می‌کنیم:

$$\log_{\frac{2}{3}}^6 = \log_{\frac{2}{3}}^{3 \times 2} = \log_{\frac{2}{3}}^3 + \log_{\frac{2}{3}}^2 = 1 + \log_{\frac{2}{3}}^2$$

$$= 1 + \frac{1}{\log_{\frac{2}{3}}^3} = 1 + \frac{1}{\frac{3a-1}{2}} = \frac{3a+1}{3a-1}$$

۶. گزینه‌ی «۳»

$$\log_{\frac{1}{2}}^{(x-2)} + \log_{\frac{1}{2}}^{(x^2+2x+4)} = 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{x^3-8} = 1$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = 2 \Rightarrow x^3 = 10 \Rightarrow x = \sqrt[3]{10}$$

حالا  $\log x^2$  رو حساب می‌کنیم:

$$\log x^2 = \log \sqrt[3]{(10)^2} = \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

۷. گزینه‌ی «۳»

$$\log(y+2) = 1 \Rightarrow y+2 = 10 \Rightarrow y = 8$$

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$$

$$\xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8) = 2$$

$$\Rightarrow \log(-4x^2 + 24x + 64) = 2$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 24x + 64 = 10^2 = 100 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -4} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

۸. گزینه‌ی «۳»

$$\sqrt{x} \log_x^2 = 2$$

با شرط  $x > 0$  داریم:

$$\Rightarrow \sqrt{x}^2 \log_x^2 = 2 \Rightarrow (\sqrt{x}^2) \log_x^2 = 2 \Rightarrow x \log_x^2 = 2$$

از طرفین، لگاریتم در پایه‌ی ۲ می‌گیریم:

$$\log_x^x \log_x^2 = \log_2^2 \Rightarrow (\log_x^2)(\log_x^x) = 1$$

$$(\log_x^2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2 \\ \log_x^2 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{3}{2}$$

۹. گزینه‌ی «۴»

لگاریتم جذر عددی در پایه‌ی ۴  $(\log_4^{\sqrt{x}})$  از لگاریتم مجذور آن عدد

در پایه‌ی ۴  $(\log_4^x)$  یک واحد کم‌تر است، یعنی:

$$\log_4^{\sqrt{x}} = \log_4^x - 1 \Rightarrow \log_4^{\sqrt{x}} - \log_4^x = -1$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\log_4^x} = -1 \Rightarrow \log_4^x = \frac{-\sqrt{x}}{-1} = \sqrt{x} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 4^{-1}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow x = \sqrt{16} = 2\sqrt{2}$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

$$\log_a^{16} = -3 \Rightarrow a^{-3} = 16 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{16} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

پس حاصل  $\log_{\lambda}^a$  برابر است با:

$$\log_{\lambda}^{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} = \log_{\lambda}^{16^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{3} \log_{\lambda}^{16} = -\frac{1}{3} \log_{\frac{2}{3}}^{2^4} = -\frac{4}{9} = k$$

۱۱. گزینه‌ی «۳»

اول باید توجه کنیم که دامنه‌ی نامعادله،  $(-\infty, 0)$  است.

حالا با کمک روابط داریم:

$$\log(-x) + \log(1-2x) < 0$$

$$\Rightarrow \log(2x^2 - x) < 0 \Rightarrow 2x^2 - x < 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 < 0 \Rightarrow (2x+1)(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} -\frac{1}{2} < x < 0$$

$$\Rightarrow A - \frac{2}{3A} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times(3A)} 3A^2 - 2 = A$$

$$\Rightarrow 3A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow A = 1, A = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = 1 \Rightarrow x = 1 \\ \log x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = 10^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب حقیقی دارد.

۱۷. گزینه ی «۱»

$$\log \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \log \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}} = \log \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

۱۸. گزینه ی «۳»

$$8^a = 16\sqrt{2} \Rightarrow (2^3)^a = 2^4 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{3a} = 2^{4+\frac{1}{2}} \Rightarrow 3a = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

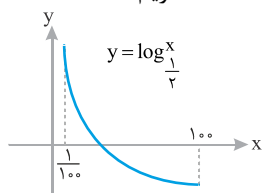
$$\Rightarrow 2^{3a} = 2^{4+\frac{1}{2}} \Rightarrow 3a = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\log_{16}^{4a+2} = \log_{16}^{4(\frac{3}{2})+2} = \log_{16}^8 = \log_{2^4}^{2^3} = \frac{3}{4}$$

پس:

۱۹. گزینه ی «۱»

با توجه به شکل  $y = \log_a^x$  وقتی  $0 < a < 1$  است، داریم:



$$\log_{\frac{1}{2}}^{100} > \log_{\frac{1}{2}}^{1000}$$

یعنی:

۲۰. گزینه ی «۳»

با فرض  $A = 5^3$  از طرفین لگاریتم می گیریم:

$$\log A = 3 \cdot \log 5 \Rightarrow \log A = 3 \cdot (1 - \log 2)$$

$$\Rightarrow \log A = 3 \cdot (1 - 0.30103) \Rightarrow \log A = 3 \cdot (0.69897)$$

$$\Rightarrow A = 10^{2.09691} \Rightarrow A, 21 \text{ رقمی است}$$

دقت کنید که مثلاً  $10^2$ ، سه رقمی است. پس  $10^{2.09691}$ ، ۲۱ رقمی خواهد بود.

۱۲. گزینه ی «۱»

از اونجا که  $\log 5 = 1 - \log 2$  حاصل رو می یابیم:

$$\frac{\log 5 - \log 8 - 1}{\log 2\sqrt{2} + \log 4} = \frac{1 - \log 2 - \log 2^3 - 1}{\log 2^{\frac{3}{2}} + \log 2^2} = \frac{-\log 2 - 3\log 2}{\frac{3}{2}\log 2 + 2\log 2} = \frac{-4\log 2}{\frac{7}{2}\log 2} = -\frac{8}{7}$$

۱۳. گزینه ی «۲»

$$\frac{\frac{1}{8} - \log_8^6}{\frac{1}{8} \log_8^6} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} \log_8^6} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}}{1} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{1} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{1}$$

۱۴. گزینه ی «۴»

$$9^x + 3^x - 6 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 + (3^x) - 6 = 0 \Rightarrow (3^x + 3)(3^x - 2) = 0 \Rightarrow 3^x = 2$$

از طرفین لگاریتم می گیریم.

$$\log 3^x = \log 2 \Rightarrow x \times \log 3 = \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3^2$$

حالا با توجه به اینکه  $\log_6^k = k$  داریم:

$$\log_6^k = k \Rightarrow \log_6^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_6^{\frac{1}{k}} + \log_6^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_6^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} - 1 \Rightarrow x = \frac{1-k}{k}$$

۱۵. گزینه ی «۴»

$$\log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^3+2) \Rightarrow \log(x^2-3x+2) = \log(x^3+2) \Rightarrow x^2-3x+2 = x^3+2 \Rightarrow x^3-x^2+3x=0 \Rightarrow x(x^2-x+3)=0 \Rightarrow x=0$$

دقت کنید که معادله ی  $x^2 - x + 3 = 0$  به دلیل منفی بودن  $\Delta$  جواب ندارد.

۱۶. گزینه ی «۲»

$$\log x^2 - 2 \log \frac{1}{x^3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \log x - \frac{4}{3} \log \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2A - \frac{4}{3A} = \frac{2}{3}$$

با تغییر متغیر  $\log x = A$  داریم: