پاسخ آزمون جامع فصل چهارم

۱. گزینه‌ی «۳»

با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ داریم:

معادله : $t^2-(2k+1)t+k-1=0 \quad (*)$

برای اینکه معادله‌ی اصلی دو ریشه داشته باشد باید معادله‌ی (*) دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد. بنابراین باید:

$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow(2k+1)^2-4(k-1)>0\Rightarrow 4k^2+5>0\\ \frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{k-1}{1}>0\Rightarrow k>1\\ -\frac{b}{a}>0\Rightarrow\frac{2k+1}{1}>0\Rightarrow k>-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}k>1$$

۲. گزینه‌ی «۲»

$$A=\left||\alpha|-|\beta|\right|\Rightarrow A^2=\alpha^2+\beta^2-2|\alpha\beta|$$
$$\Rightarrow A^2=S^2-2P-2|P|$$
$$\Rightarrow A^2=6^2-2(-3)-2|-3|=36\Rightarrow A=6$$

۳. گزینه‌ی «۱»

با توجه به اینکه $n=10$ است، بسط داده شده ۱۱ جمله دارد و جمله‌ی وسط برابر جمله‌ی ششم است. در نتیجه:

$$P_6=\binom{10}{5}(x)^5\times\left(-\frac{3}{x^2}\right)^5=\binom{10}{5}(-3)^5\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

۴. گزینه‌ی «۱»

$$x+1=0\Rightarrow x=-1: R=(-1)^5-2(-1)^3+m(-1)^2+1$$
$$=m+2=4\Rightarrow m=2$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم x^3-2x+1 بر $x+2$ را می‌خواهیم که برابر است با: $x+2=0\Rightarrow x=-2: R=(-2)^3-2(-2)+1=-3$

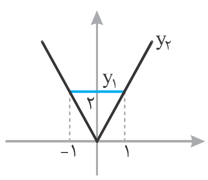
۵. گزینه‌ی «۲»

دامنه‌ی معادله، $x\ge 3$ است. به ازای $x=3$ تساوی برقرار است. به ازای $x>3$ سرعت رشد عبارت سمت چپ بیشتر از عبارت سمت راست است، پس معادله همان ریشه‌ی $x=3$ را دارد.

۶. گزینه‌ی «۳»

$$\left|1+\frac{1}{x}\right|+\left|1-\frac{1}{x}\right|\ge 2\Rightarrow\left|\frac{x+1}{x}\right|+\left|\frac{x-1}{x}\right|\ge 2$$
$$\Rightarrow\frac{|x+1|}{|x|}+\frac{|x-1|}{|x|}\ge 2\xrightarrow[x\neq 0]{\times(|x|)}\overbrace{|x+1|+|x-1|}^{y_1}\ge\overbrace{2|x|}^{y_2}$$

حالا با کمک رسم جواب را می‌یابیم:



با توجه به نمودار به ازای تمام مقادیر عضو دامنه‌ی نامعادله $y_1\ge y_2 \ (x\neq 0)$ است، در نتیجه مجموعه جواب نامعادله $\mathbb{R}-\{0\}$ است.

۷. گزینه‌ی «۲»

چون مجموعه جواب $(-\infty,-2)$ است مخرج کسر منفی است، پس برای برقراری نامعادله باید:

$$mx^2-4x+m-3<0\Rightarrow\begin{cases}\Delta<0\Rightarrow 16-4(m)(m-3)<0\\ m<0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-4m^2+12m+16<0\\ m<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2-3m-4>0\\ m<0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}m>4 \ \text{یا}\ m<-1\\ m<0\end{cases}\Rightarrow m<-1$$

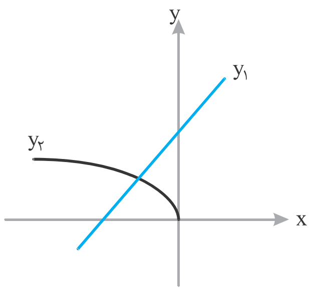
۸. گزینه‌ی «۲»

$$x+\frac{4-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=2\Rightarrow\frac{4-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=2-x$$
$$\Rightarrow 4-\sqrt{x}=4-2x-2\sqrt{x}+x\sqrt{x}\Rightarrow x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}=0$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}-1)=0$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}\left((\sqrt{x}-1)^2-2\right)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=0\Rightarrow x=0 \ \checkmark\\ \sqrt{x}-1=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{2}+1 \ \checkmark\\ \sqrt{x}=-\sqrt{2}+1 \ \times\end{cases}\end{cases}$$

۹. گزینه‌ی «۲»

با توجه به وجود $\sqrt{-x}$ و با توجه به مخرج، باید $x<0$ باشد. بنابراین $|x|=-x$ و داریم:

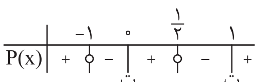
$$\frac{-x+3}{-x+\sqrt{-x}}=2\Rightarrow -x+3=-2x+2\sqrt{-x}$$
$$\Rightarrow\underbrace{x+3}_{y_1}=\underbrace{2\sqrt{-x}}_{y_2}\Rightarrow$$



پس معادله تنها یک جواب دارد.

۱۰. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}>2\Rightarrow\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}-2>0$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-2x+1-x^2-x-2x^2+2x}{x(x-1)}>0$$
$$\Rightarrow\frac{-2x^2-x+1}{x(x-1)}>0\Rightarrow\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}<0$$
$$\Rightarrow\frac{(x+1)(2x-1)}{x(x-1)}<0\Rightarrow$$

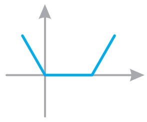


$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $(-1,0)\cup(\frac{1}{2},1)\Rightarrow$ شامل عدد صحیح نیست.

۱۱. گزینه‌ی «۲»

$$\sqrt{x^۲-۶x+۹}=۳-|x|\Rightarrow\sqrt{(x-۳)^۲}=۳-|x|$$
$$\Rightarrow|x-۳|=۳-|x|\Rightarrow|x-۳|+|x|=۳$$

با رسم شکل در می‌یابیم که جواب، بازه‌ی $[۰,۳]$ است.



۱۲. گزینه‌ی «۲»

$$x^۳+|x-۱|=۱\Rightarrow\begin{cases}x\ge۱: x^۳+x-۱=۱\\ x<۱: x^۳-x+۱=۱\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^۳+x-۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲+x+۲)=۰\Rightarrow x=۱\xrightarrow{x\ge۱}\\ x=۱\\ x^۳-x=۰\Rightarrow x=۰,۱,-۱\xrightarrow{x<۱}x=۰,-۱\end{cases}$$

پس معادله سه جواب دارد و خط و منحنی در سه نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۳. گزینه‌ی «۲»

برای اینکه نامعادله برقرار باشد باید عبارت سمت راست یعنی $(۱-x)$ نامنفی باشد، یعنی: $۱-x\ge۰\Rightarrow x\le۱$

$$\Rightarrow|۱-x^۲|\le۱-x\Rightarrow\begin{cases}-۱\le x\le۱ : ۱-x^۲\le۱-x\\ x<-۱ \quad : -(۱-x^۲)\le۱-x\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}x^۲-x\ge۰\Rightarrow x\ge۱ \text{ یا } x\le۰\xrightarrow{-۱\le x\le۱}-۱\le x\le۰ \text{ یا } x=۱\\ x^۲+x-۲\le۰\Rightarrow-۲\le x\le۱\xrightarrow{x<-۱}-۲\le x<-۱\end{cases}$$

از اجتماع مجموعه جواب‌های به دست آمده داریم:

مجموعه جواب نامعادله : $[-۲,۰]\cup\{۱\}$

پس: $\max(b-a)=۲$

۱۴. گزینه‌ی «۱»

$$[x^۲-۳x]=-۳\Rightarrow\overbrace{-۳\le x^۲-۳x}^{(۱)}\underbrace{<-۲}_{(۲)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(۱)\ \ x^۲-۳x+۳\ge۰ \quad \text{همواره برقرار است}\\ (۲)\ x^۲-۳x+۲<۰\Rightarrow۱<x<۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow\log_۲^۱<\log_۲^x<\log_۲^۲\Rightarrow۰<\log_۲^x<۱\Rightarrow[\log_۲^x]=۰$$

۱۵. گزینه‌ی «۴»

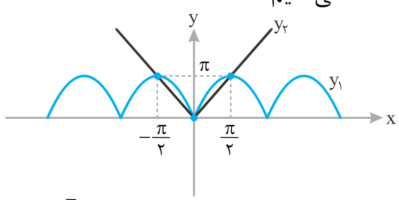
$x=۲$ ریشه‌ی معادله است پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{۱}+a=\frac{۶}{۱}\Rightarrow a=۵$$
$$\Rightarrow \text{ معادله : } \frac{۲x-۳}{x-۱}+۵=\frac{۵x-x^۲}{x-۱}$$
$$\xrightarrow{\times(x-۱)}۲x-۳+۵x-۵=۵x-x^۲$$
$$\Rightarrow x^۲+۲x-۸=۰\Rightarrow(x+۴)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۴$$

۱۶. گزینه‌ی «۱»

$$|\sin x|\ge\left|\frac{۲x}{\pi}\right|\Rightarrow\overbrace{|\pi\sin x|}^{y_۱}\ge\overbrace{|۲x|}^{y_۲}$$

حالا از رسم استفاده می‌کنیم:



با توجه به شکل جواب نامعادله‌ی داده شده بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ است.

۱۷. گزینه‌ی «۳»

$$x-۲\sqrt{x+۲}=۱\Rightarrow x-۱=۲\sqrt{x+۲}$$

با فرض $x\ge۱$ داریم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}x^۲-۲x+۱=۴x+۸\Rightarrow x-۶x-۷=۰$$
$$\Rightarrow(x+۱)(x-۷)=۰\Rightarrow x=-۱, x=۷$$
$$\xrightarrow{x\ge۱}x=۷$$

۱۸. گزینه‌ی «۲»

ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲+۷x+۱=۰$ را برابر α و β در نظر می‌گیریم. بنابراین ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ برابر $\alpha+۱$ و $\beta+۱$ است. پس:

حاصلضرب ریشه‌ها: $P'=(\alpha+۱)(\beta+۱)=b\Rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=b$

با توجه به معادله‌ی اولیه:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳}\\ \alpha\beta=\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow b=\frac{۱}{۳}-\frac{۷}{۳}+۱=-۱$$

۱۹. گزینه‌ی «۴»

$$x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=-۱$$

عبارت را برحسب قوای $x^۲$ مرتب می‌کنیم:

$$R(x)=(x^۲)^۲x+۳(x^۲)^۲-(x^۲)x+bx^۲+۱$$
$$=x+۳+x-b+۱\Rightarrow R(x)=۲x-b+۴$$

چون باقی‌مانده به صورت $kx+۲$ است، بنابراین:

$$\Rightarrow\begin{cases}k=۲\\ -b+۴=۲\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

۲۰. گزینه‌ی «۴»

نقطه‌ی مینیمم بر روی خط $y=۱$ است، بنابراین:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=۱\Rightarrow\frac{\Delta}{۴a}=-۱\Rightarrow\frac{۸-۴a^۲}{۴a}=-۱\Rightarrow۴a^۲-۴a-۸=۰$$
$$\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\Rightarrow(a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow a=۲\ ,\ a=-۱$$

اما چون تابع مینیمم دارد، باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد. بنابراین:

$a=۲$