پاسخ آزمون جامع فصل پنجم

۱. گزینه‌ی «۲»

برای یافتن نقطه‌ی تقاطع، باید معادله‌ی $fog(x)=f(x)$ را حل کنیم:

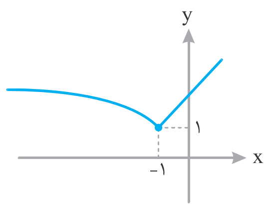
$$\Rightarrow (2(x+2)-3)^2=(2x-3)^2 \Rightarrow (2x+1)^2=(2x-3)^2$$

با توجه به گزینه‌ها $x=\frac{1}{2}$ جواب است.

۲. گزینه‌ی «۲»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}\ , & x\le -1\\ |x+2|\ , & x>-1\end{cases}$$



با توجه به نمودار، برد تابع بازه‌ی $[1,+\infty)$ است.

۳. گزینه‌ی «۴»

$$-1<-x+1\le 2\Rightarrow -2<-x\le 1\Rightarrow -1\le x<2$$

۴. گزینه‌ی «۳»

با توجه به مقادیر x (دامنه‌ی g) و مقادیر g و f داریم:

$$x=1: fog(1)=f(g(1))=f(6)=5\Rightarrow (1,5)\in fog$$
$$x=2: fog(2)=f(g(2))=f(3)=4\Rightarrow (2,4)\in fog$$
$$x=3: fog(3)=f(g(3))=f(2)=2\Rightarrow (3,2)\in fog$$
$$x=4: fog(4)=f(g(4))=f(1)=3\Rightarrow (4,3)\in fog$$
$$x=5: fog(5)=f(g(5))=f(2)=2\Rightarrow (5,2)\in fog$$
$$x=6: fog(6)=f(g(6))=f(3)=4\Rightarrow (6,4)\in fog$$

پس اعضای برد تابع fog برابر $\{2,3,4,5\}$ است که شامل چهار عضو است.

۵. گزینه‌ی «۲»

چون تابع فرد f، سه زوج مرتب دارد، پس حتماً یک عضو $(0,0)$ است، از طرفی چون $(1,2)\in f$ است بنابراین باید $(-1,-2)\in f$ باشد، در نتیجه:

$$\begin{cases}(a,b)=(0,0)\Rightarrow a=0\ ,\ b=0\\ (c,d)=(-1,-2)\Rightarrow c=-1\ ,\ d=-2\end{cases}\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

۶. گزینه‌ی «۱»

با رسم نمودار تابع در هر یک از بازه‌های رسم شده در می‌یابیم که تابع در بازه‌ی $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ معکوس‌پذیر است و به عبارت دیگر معکوس آن یک تابع است.

۷. گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم اگر $(a,b)\in f$ آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$

در گزینه‌ی «۴»، با توجه به اینکه $(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})\in f^{-1}$ است، پس باید $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})\in f$ باشد که هست:

$$f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸. گزینه‌ی «۱»

شیب خطی که از دو نقطه‌ی $(1,2)$ و $(0,y)$ می‌گذرد برابر شیب خطی است که از دو نقطه‌ی $(1,2)$ و $(x,0)$ می‌گذرد. در نتیجه:

$$\frac{y-2}{0-1}=\frac{0-2}{x-1}\Rightarrow (y-2)(x-1)=2$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{x-1}+2\Rightarrow y=\frac{2+2x-2}{x-1}=\frac{2x}{x-1}\ (*)$$

با توجه به شکل، مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$S=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{2}=\frac{x\times y}{2}\overset{(*)}{=}\frac{\frac{2x^2}{x-1}}{2}=\frac{x^2}{x-1}$$

۹. گزینه‌ی «۲»

از روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوم برای محاسبه‌ی برد کمک می‌گیریم:

$$y=\frac{x^2+x+m}{x-1}\Rightarrow yx-y=x^2+x+m$$

$$\Rightarrow x^2+(1-y)x+m+y=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(1-y)\pm\sqrt{(1-y)^2-4(m+y)}}{2}$$

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، بنابراین:

$$y^2-2y+1-4m-4y\ge 0\Rightarrow y^2-6y+1-4m\ge 0$$

با توجه به اینکه مجموعه جواب نامعادله‌ی فوق به صورت $\mathbb{R}-(1,5)$ یا به عبارت دیگر به صورت $(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$ است، پس حتماً $y=1$ و $y=5$ ریشه‌های معادله‌ی $y^2-6y+1-4m=0$ است. در نتیجه با قرار دادن یکی از این مقادیر در معادله، m را می‌یابیم:

$$y=1: 1-6+1-4m=0\Rightarrow m=-1$$

۱۰. گزینه‌ی «۱»

با توجه به توابع f و g داریم:

$$\frac{2}{f}=\{(1,\frac{2}{3})\ ,\ (-1,1)\}$$

$$\frac{1}{g}=\{(2,1),(1,-\frac{1}{2}),(3,\frac{1}{4})\}$$

از آنجا که اشتراک دامنه‌های این دو تابع برابر $\{1\}$ است، بنابراین:

$$(\frac{2}{f}-\frac{1}{g})(1)=\frac{2}{f}(1)-\frac{1}{g}(1)=\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})=\frac{7}{6}$$

۱۱. گزینه‌ی «۳»

$$D_f: x\le 1\qquad ,\quad D_g:[x]\ge 1\Rightarrow x\ge 1$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\ge 1,\sqrt{[x]-1}\le 1\}=\{x\ge 1,[x]-1\le 1\}$$

$$=\{x\ge 1,[x]\le 2\}=\{x\ge 1\ ,\ x<3\}=1\le x<3$$

۱۲. گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases} f(x)=x^3+2 \Rightarrow f(g(x))=g^3(x)+2 \\ fog(x)=x+[x] \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^3(x)+2=x+[x] \Rightarrow g^3(x)=x+[x]-2$$

$$\Rightarrow g(x)=\sqrt[3]{x+[x]-2} \Rightarrow g(2\sqrt{2})=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+2-2}$$

$$\Rightarrow g(2\sqrt{2})=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

۱۳. گزینه‌ی «۱»

در ضابطه‌ی بالا x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم و چون تابع فرد است باید قرینه‌ی ضابطه‌ی پایین به دست بیاید:

$$\sqrt{4x^2-8x+36}=-a\sqrt{x^2+bx+c}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4(x^2-2x+9)}=-a\sqrt{x^2+bx+c}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2-2x+9}=-a\sqrt{x^2+bx+c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \Rightarrow a+b+c=5 \\ c=9 \end{cases}$$

۱۴. گزینه‌ی «۳»

برای مثال با توجه به اینکه f نزولی و گذرنده از مبدأ است می‌توان f را به صورت $f(x)=-x$ در نظر گرفت. با توجه به این ضابطه تنها در گزینه‌ی «۳» دامنه برابر $\mathbb{R}$ است، زیرا:

$$y=\sqrt{(-x)(-x)}=\sqrt{x^2}=|x| : \text{دامنه}=\mathbb{R}$$

۱۵. گزینه‌ی «۲»

با توجه به اینکه f درجه‌ی دوم است، ماکزیمم a برابر طول محور تقارن تابع است. بنابراین:

$$a=-\frac{4}{2(1)}=-2 \Rightarrow f(x)=(x+2)^2-5 \; ; \; x\in(-\infty,-2]$$

حالا ضابطه‌ی معکوس را می‌یابیم:

$$y=(x+2)^2-5 \Rightarrow y+5=(x+2)^2$$

$$\Rightarrow x+2=\pm\sqrt{y+5} \xrightarrow{x\le -2} x+2=-\sqrt{y+5}$$

$$\Rightarrow x=-2-\sqrt{y+5} \Rightarrow f^{-1}(x)=-2-\sqrt{x+5}$$

از طرفی برای محاسبه‌ی دامنه‌ی f^{-1} باید برد f را محاسبه کنیم:

$$x\le -2 \Rightarrow x+2\le 0 \Rightarrow (x+2)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2-5\ge -5 \Rightarrow y\ge -5$$

پس دامنه‌ی f^{-1} بازه‌ی $[-5,+\infty)$ است.

۱۶. گزینه‌ی «۱»

$$f^{-1}og^{-1}(\sqrt{2})=f^{-1}(g^{-1}(\sqrt{2}))$$

با توجه به ضابطه‌ی g:

$$\sqrt{x^3+1}=\sqrt{2} \Rightarrow x=1 \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(\sqrt{2}))=f^{-1}(1)$$

با توجه به ضابطه‌ی f:

$$\log_2^{(x-1)}=1 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f^{-1}og^{-1}(\sqrt{2})=3$$

۱۷. گزینه‌ی «۲»

تنها تابع هم زوج و هم فرد تابع $y=0$ است. بنابراین:

$$gof=0 \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z}: f(x)=0 \Rightarrow gof(x)=g(0)=0 \\ x\notin\mathbb{Z}: f(x)=-1 \Rightarrow gof(x)=g(-1)=0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی g:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0+0+b=0 \Rightarrow b=0 \\ 1-a+b=0 \xrightarrow{b=0} a=1 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=2$$

۱۸. گزینه‌ی «۱»

$$y=(\sqrt{x}+2)^2 \Rightarrow \sqrt{x}+2=\pm\sqrt{y}$$

طرف چپ همواره مثبت است. بنابراین:

$$\sqrt{x}+2=\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-2$$

$$\Rightarrow x=(\sqrt{y}-2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x}-2)^2=x-4\sqrt{x}+4$$

۱۹. گزینه‌ی «۲»

در گزینه‌ی «۱»، «۳» و «۴» دامنه‌ها برابر نیستند. در گزینه‌ی «۲» داریم:

$$\begin{cases} D_f: x\le 0 \\ D_g: x\le 0 \end{cases}$$

با توجه به این دامنه:

$$\sqrt{-x^3}=\sqrt{-x(x^2)}=|x|\sqrt{-x} \xrightarrow{x\le 0} -x\sqrt{-x}$$

$$\Rightarrow f(x)=g(x)$$

۲۰. گزینه‌ی «۲»

با توجه به شکل: $g(f(x))=2x$

از طرفی چون $g(x)=3x+4$، بنابراین:

$$g(f(x))=3f(x)+4=2x \xrightarrow{x=5} 3f(5)+4=10$$

$$\Rightarrow f(5)=2$$