پاسخ آزمون جامع فصل ششم

۱. گزینه‌ی«۳»

از رابطه‌ی $\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 70^\circ(\tan 20^\circ+\tan 10^\circ)=\sin 70(\frac{\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ\cos 20^\circ})$$

از آنجا که $\sin 70^\circ=\cos 20^\circ$ داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{2\cos 10^\circ}$$

۲. گزینه‌ی«۱»

از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم:

$$\sin^6 x-\sin^3 x+1=(\sin^3 x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=(\sin^3 x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

با توجه به اینکه $(\sin^3 x-\frac{1}{2})^2\geq 0$ است. پس: $Min=\frac{3}{4}$

۳. گزینه‌ی«۴»

$|\sin x|: T_1=\pi$

$|\cos x-1|: T_2=2\pi$

(دقت کنید که به دلیل وجود عدد ثابت (۱-)، دوره‌ی تناوب در اینجا نصف نمی‌شود.) $\Rightarrow T=[2\pi,\pi]=2\pi$

۴. گزینه‌ی«۴»

می‌دانیم $\cos 70^\circ=\sin 20^\circ$. بنابراین:

$$\text{عبارت}=\frac{2\sin 70^\circ-1}{2\sin 20^\circ+\sqrt{3}}=\frac{2(\sin 70^\circ-\frac{1}{2})}{2(\sin 20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$=\frac{\sin 70^\circ-\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ+\sin 60^\circ}\xrightarrow{\text{تبدیل جمع به ضرب}}\frac{2\sin 20^\circ\cos 50^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 20^\circ}$$

از آنجا که $\sin 40^\circ=\cos 50^\circ$ بنابراین:

$$\text{عبارت}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\tan 20^\circ$$

۵. گزینه‌ی«۳»

با کمک قضیه‌ی سینوس‌ها زاویه‌ی B را می‌یابیم:

$$\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}\Rightarrow\frac{\sin\hat{B}}{4}=\frac{\sin 60^\circ}{2\sqrt{6}}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\hat{B}=45^\circ$$

از آنجا که مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است. بنابراین: $\hat{A}=75^\circ$

۶. گزینه‌ی«۲»

ابتدا از رابطه‌ی تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\cot 2x-\frac{2\sin x}{2\sin x\sin 2x}=\cot 2x-\frac{1}{\sin 2x}$$

$$=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{\cos 2x-1}{\sin 2x}$$

حالا از روابط طلایی (نصف قوس) استفاده می‌کنیم:

$$=\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=-\tan x$$

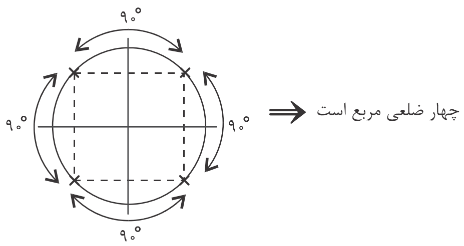
۷. گزینه‌ی«۱»

با فرض $x\neq\frac{k\pi}{2}$ داریم:

$$(\tan x)^{\sin^2 x}(\frac{1}{\tan x})^{\cos^2 x}=1\Rightarrow(\tan x)^{\sin^2 x}=(\tan x)^{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow\sin^2 x=\cos^2 x\Rightarrow\tan^2 x=1\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

حالا جواب‌ها را روی دایره‌ی مثلثاتی نمایش می‌دهیم:



۸. گزینه‌ی«۲»

از روابط $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ و $\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{معادله}: \frac{2}{\sin 2x}=-8\cos 2x\cos 4x$$

$$\Rightarrow 1=-4\sin 2x\cos 2x\cos 4x$$

$$\Rightarrow 1=-2\sin 4x\cos 4x\Rightarrow 1=-\sin 8x$$

$$\Rightarrow\sin 8x=-1\Rightarrow 8x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{16}$$

۹. گزینه‌ی«۴»

با کمک روابط طلایی داریم:

$$\text{معادله}=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}+(-1)=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\cos 6x}{2}-1=0$$

$$\Rightarrow\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 6x}{2}=0\Rightarrow\cos 6x=\cos 2x$$

$$\Rightarrow 6x=2k\pi\pm 2x\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{k\pi}{4}\end{cases}$$

با توجه به اینکه جواب‌های $\frac{k\pi}{4}$، جواب‌های $\frac{k\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود، بنابراین جواب کلی معادله $x=\frac{k\pi}{4}$ است.

۱۰. گزینه‌ی«۳»

عبارت را مرتب و سپس از روابط تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-\sin x+(\sin 2x-\sin 4x)}{\cos x+(\cos 2x+\cos 4x)}=\frac{-\sin x-2\sin x\cos 3x}{\cos x+2\cos x\cos 3x}$$

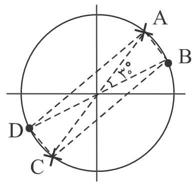
$$=\frac{-\sin x(1+2\cos 3x)}{\cos x(1+2\cos 3x)}=-\tan x$$

۱۱. گزینه‌ی«۳»

$$\sqrt{3}\tan^2 x-4\tan x+\sqrt{3}=0$$

$$\tan x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\sqrt{3}}=\frac{4\pm 2}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}\quad(\times)\\ \tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}\quad(\bullet)\end{cases}$$



$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AC)(BD)\sin 30^\circ=\frac{1}{4}(2)(2)=1$$

۱۲. گزینه‌ی«۳»

دوره‌ی تناوب $y_1=\sin x+\cos x$ برابر 2π است.

دوره‌ی تناوب $y=|\sin x+\cos x|$ برابر π است.

اما برای اطمینان $\frac{\pi}{2}$ را هم امتحان می‌کنیم:

$$f(x+\frac{\pi}{2})=|\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x+\frac{\pi}{2})|$$

$$=|\cos x-\sin x|\neq f(x)$$

پس دوره‌ی تناوب تابع همان π است.

۱۳. گزینه‌ی«۳»

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\frac{\sin x}{\cos x}+1}=1-\sin 2x\Rightarrow\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=(\sin x-\cos x)^2$$

$$\xrightarrow{\cos x\neq 0}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=(\sin x-\cos x)^2$$

$$\Rightarrow\xrightarrow{\sin x-\cos x=0}\frac{1}{\sin x+\cos x}=\sin x-\cos x$$

$$\Rightarrow\sin^2 x-\cos^2 x=1\Rightarrow\cos 2x=-1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 2x=-1\Rightarrow 2x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x-\cos x=0\Rightarrow\tan x=1\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ \cos x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

پس جواب کلی معادله به صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ است و در بازه‌ی $[-\pi,\frac{\pi}{2}]$ دو جواب $\frac{-3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ دارد.

۱۴. گزینه‌ی«۱»

از رابطه‌ی $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3})=\frac{1-\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3})}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\sin(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۵. گزینه‌ی«۲»

طرف چپ تساوی در بازه‌ی $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ و طرف راست در بازه‌ی $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ تغییر می‌کند. پس برای برقراری تساوی باید هر دو طرف برابر $\sqrt{2}$ باشند:

$$\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\\ ,\\ \sqrt{2+\cos^2 2x}=\sqrt{2}\Rightarrow 2+\cos^2 2x=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=1\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ ,\\ \cos^2 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ ,\\ x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

اشتراک این دو دسته جواب، جواب $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ است، که در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ یک جواب دارد.

۱۶. گزینه‌ی«۳»

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=2\Rightarrow\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=2\Rightarrow\tan\frac{x}{2}=2$$

برای محاسبه‌ی $\cot x$ ابتدا $\tan x$ را می‌یابیم:

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2(2)}{1-(2)^2}=-\frac{4}{3}\Rightarrow\cot x=-\frac{3}{4}$$

۱۷. گزینه‌ی«۱»

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x-5\tan x+2=0$$

$$\tan x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow\tan x=2\ ,\ \tan x=\frac{1}{2}$$

حالا $\tan(\frac{\pi}{4}-x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$

اگر $\tan x=\frac{1}{2}$: $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{3}$

اگر $\tan x=2$: $\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{-1}{3}$

۱۸. گزینه‌ی«۳»

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۱-\sin ۲x}}=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\sqrt{(\sin x-\cos x)^{۲}}}=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{|\sin x-\cos x|}$$

چون $\frac{\pi}{۴}>x>۰$ پس:

$$|\sin x-\cos x|=-(\sin x-\cos x)$$

$$\Rightarrow \text{عبارت}=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{-(\sin x-\cos x)}=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{-(\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴}))}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۹. گزینه‌ی«۲»

$$\sin ۳\theta=\frac{۹}{۴}\sin\theta\Rightarrow ۳\sin\theta-۴\sin^{۳}\theta=\frac{۹}{۴}\sin\theta$$

$$\Rightarrow ۳-۴\sin^{۲}\theta=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۳-۴(۱-\cos^{۲}\theta)=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳-۴+۴\cos^{۲}\theta=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۴\cos^{۲}\theta=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos^{۲}\theta=\frac{۱۳}{۱۶}\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$$

۲۰. گزینه‌ی«۳»

$$\cos^{۳}x(۳\sin x-۴\sin^{۳}x)+\sin^{۳}x(۴\cos^{۳}x-۳\cos x)=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳\sin x\cos^{۳}x-۴\sin^{۳}x\cos^{۳}x+۴\sin^{۳}x\cos^{۳}x-۳\sin^{۳}x\cos x=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳\sin x\cos^{۳}x-۳\sin^{۳}x\cos x=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x(\cos^{۲}x-\sin^{۲}x)=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x(\cos ۲x)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{۱}{۴}\sin ۴x=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin ۴x=۱\Rightarrow ۴x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$