پاسخ آزمون جامع فصل هفتم

۱. گزینه‌ی «۳»

$$b^{-1}<a^{-1}<۰ \Rightarrow \frac{۱}{b}<\frac{۱}{a}<۰ \Rightarrow b>a \Rightarrow a-b<۰$$

بنابراین: $|\underbrace{a}_{\text{منفی}}|+|\underbrace{a-b}_{\text{منفی}}|=-a-(a-b)=b-۲a$

۲. گزینه‌ی «۴»

کم‌ترین مقدار این تابع به ازای ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها رخ می‌دهد. پس ریشه‌ها و سپس عرض تابع را در این نقاط می‌یابیم. کم‌ترین مقدار عرض‌های محاسبه شده، کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=|x|+|x-۱|+۲|x-۳|$ است.

$$|x|: x=۰ \Rightarrow f(۰)=۷$$
$$|x-۱|: x=۱ \Rightarrow f(۱)=۵ \quad \Rightarrow \text{کم‌ترین مقدار}=۵$$
$$|x-۳|: x=۳ \Rightarrow f(۳)=۵$$

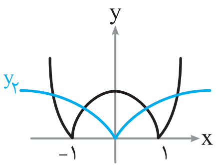
۳. گزینه‌ی «۳»

$$|۲x-۱|<|x-۳| \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۴x^۲-۴x+۱<x^۲-۶x+۹$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۸<۰ \Rightarrow (۳x-۴)(x+۲)<۰$$
$$\Rightarrow -۲<x<\frac{۴}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز همسایگی}: a=\dfrac{-۲+\frac{۴}{۳}}{۲}=-\dfrac{۱}{۳} \\ \text{شعاع همسایگی}: r=\dfrac{\frac{۴}{۳}-(-۲)}{۲}=\dfrac{۵}{۳} \end{cases}$$
$$\Rightarrow a-r=-۲$$

۴. گزینه‌ی «۴»

از رسم کمک می‌گیریم:

$$\underbrace{|x^۲-۱|}_{y_۱}=\underbrace{\sqrt{|x|}}_{y_۲} \Rightarrow$$



بنابراین معادله چهار ریشه‌ی حقیقی دارد.

۵. گزینه‌ی «۳»

$$a\le b \xrightarrow[(b^۲\ge ۰)]{\text{طرفین ضربدر } b^۲} ab^۲\le b^۳$$

برای سایر گزینه‌ها خودتان مثال نقض بیاورید.

۶. گزینه‌ی «۲»

از تعیین علامت برای حل استفاده می‌کنیم:

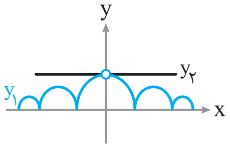
$$\begin{cases} x\ge -۱: ((x+۱)+۱)(x-۳)=۲ \Rightarrow (x+۲)(x-۳)=۲ \\ x<-۱: (-x-۱+۱)(x-۳)=۲ \Rightarrow (-x)(x-۳)=۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-x-۶=۲ \Rightarrow x^۲-x-۸=۰ \\ -x^۲+۳x=۲ \Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{۱\pm\sqrt{۳۳}}{۲} \xrightarrow{x\ge -۱} x=\dfrac{۱+\sqrt{۳۳}}{۲} \\ x=۱,۲ \xrightarrow{x<-۱} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس معادله یک جواب حقیقی دارد.

۷. گزینه‌ی «۱»

از رسم کمک می‌گیریم:

$$|\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{y_۱}|\ge \underbrace{۱}_{y_۲} \Rightarrow$$



پس در هیچ فاصله‌ای نمودار $y_۱$ بالا یا روی نمودار $y_۲$ قرار ندارد. پس نامعادله جواب ندارد.

۸. گزینه‌ی «۴»

برای سایر گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

گزینه‌ی «۱»: $x=۰, y=\sqrt{۲} \Rightarrow xy=۰$

گزینه‌ی «۲»: $x=۰, y=\sqrt{۲} \Rightarrow (\sqrt{y})^{\sqrt{x}}=۱$

گزینه‌ی «۳»: $x=۱, y=\sqrt{۲} \Rightarrow \log_y^x=۰$

۹. گزینه‌ی «۴»

در گزینه‌ی «۴» ممکن است $x=۰$ باشد، در این صورت y و z می‌توانند اعداد دلخواهی باشند.

۱۰. گزینه‌ی «۴»

ناحیه‌ی مورد نظر در حقیقت ناحیه‌ی بین نمودارهای $|x|+|y|=۱$ (یک مربع به طول قطر ۲) و $|x|+|y|=۲$ (یک مربع به طول قطر ۴) است. بنابراین:

$$\text{ناحیه محصور} = S_{\text{مربع به طول قطر ۴}} - S_{\text{مربع به طول قطر ۲}}$$
$$\Rightarrow \text{ناحیه محصور} = \frac{۴^۲}{۲}-\frac{۲^۲}{۲}=۸-۲=۶$$

۱۱. گزینه‌ی «۱»

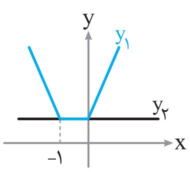
چون $|۲-|x-۱||\le ۰$ بنابراین برای برقراری نامعادله‌ی داده شده باید:

$$|۲-|x-۱||=۰ \Rightarrow ۲-|x-۱|=۰$$
$$\Rightarrow |x-۱|=۲ \Rightarrow x-۱=\pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲ \Rightarrow x=۳ \\ x-۱=-۲ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

۱۲. گزینه‌ی «۲»

از رسم کمک می‌گیریم:

$$\underbrace{|x|+|x+۱|}_{y_۱}\le \underbrace{۱}_{y_۲} \Rightarrow$$



با توجه به شکل در فاصله‌ی $[-۱,۰]$ نامعادله برقرار است.

۱۳. گزینه‌ی «۱»

$$۱/\overline{۳}=۱+۰/\overline{۳}=۱+\frac{۳}{۹}=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$
$$\Rightarrow \sqrt{a}=۱/\overline{۳}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow a=\frac{۱۶}{۹}$$

از طرفی: $۲/۱\overline{۷}=۲+۰/۱\overline{۷}=۲+\frac{۱۷-۱}{۹۰}=۲+\frac{۱۶}{۹۰}=۲+\frac{۸}{۴۵}$

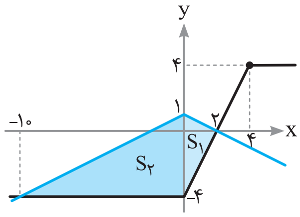
پس از آنجا که $a+b=۲/۱\overline{۷}$ بنابراین:

$$a+b=۲+\frac{۸}{۴۵}\Rightarrow\frac{۱۶}{۹}+b=۲+\frac{۸}{۴۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۸۰}{۴۵}+b=\frac{۹۸}{۴۵}\Rightarrow b=\frac{۱۸}{۴۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۱۴. گزینه‌ی «۱»

هر یک از نمودارهـای $y_۱=|x|-|x-۴|$ و $y_۲=۱-|\frac{x}{۲}|$ را در یـک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



مساحت محصور برابر مجموع مساحت‌های دو ناحیه‌ی $S_۱$ و $S_۲$ است:

$$\left.\begin{array}{l}S_۱=\frac{۵\times۲}{۲}=۵\\ S_۲=\frac{۵\times۱۰}{۲}=۲۵\end{array}\right\}\Rightarrow S_۱+S_۲=۳۰$$

برای محاسبه‌ی طول $x_۰$ باید نقطه‌ای را بیابیم که $y_۲=۱-|\frac{x}{۲}|$ برابـر ۴- شود یعنی:

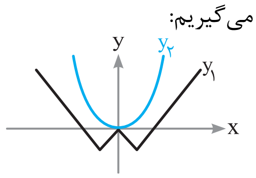
$$۱-|\frac{x}{۲}|=-۴\Rightarrow|\frac{x}{۲}|=۵$$

$$\Rightarrow\frac{x}{۲}=\pm۵\Rightarrow x=\pm۱۰\xrightarrow{x<۰}x=-۱۰$$

۱۵. گزینه‌ی «۲»

باز هم از رسم کمک می‌گیریم:

$$\underbrace{||x|-۱|-۱}_{y_۱}\geq\underbrace{x^۲}_{y_۲}\Rightarrow$$



بنابراین نامعادله‌ی داده شده تنها در $x=۰$ برقرار است.