پاسخ آزمون جامع فصل هشتم

۱. گزینه‌ی «۳»

$$۱)\ \lim_{n\to\infty}[\frac{(-۱)^n}{n}] = ۰ \text{ یا } -۱ \Rightarrow \text{واگرا}$$

$$۲)\ \lim_{n\to\infty}\log\frac{۱}{n} = \log ۰^+ = -\infty \Rightarrow \text{واگرا}$$

$$۳)\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = \sin ۰ = ۰ \Rightarrow \text{همگرا}$$

$$۴)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^۲-۱}{۲n+۱} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{۲n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲} = \infty \Rightarrow \text{واگرا}$$

۲. گزینه‌ی «۲»

پنج جمله‌ی اول دنباله و عدد همگرایی را می‌یابیم.

$$a_۱ = \frac{۱}{۳},\ a_۲ = \frac{۴}{۹},\ a_۳ = \frac{۱}{۳},\ a_۴ = \frac{۱۶}{۸۱},\ a_۵ = \frac{۲۵}{۲۴۳}$$

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{۳^n} = ۰$$

پس سوپریمم دنباله برابر $\frac{۴}{۹}$ و اینفیمم آن برابر صفر است و تفاضل آن‌ها برابر $\frac{۴}{۹}$ است.

۳. گزینه‌ی «۱»

$$a_n < ۰ \Rightarrow n^۳ - ۴n^۲ - ۱۰n < ۰ \Rightarrow n(n^۲-۴n-۱۰) < ۰$$

چون n عضو اعداد طبیعی است:

$$n^۲-۴n-۱۰<۰ \Rightarrow (n-۲)^۲-۱۴<۰$$
$$\Rightarrow (n-۲)^۲ < ۱۴ \Rightarrow -\sqrt{۱۴} < n-۲ < \sqrt{۱۴}$$
$$\Rightarrow ۲-\sqrt{۱۴} < n < ۲+\sqrt{۱۴} \xrightarrow[\sqrt{۱۴}\simeq ۳/...]{n\in\mathbb{N}} ۱ \le n < ۵/...$$
$$\Rightarrow n = ۱,۲,۳,۴,۵$$

۴. گزینه‌ی «۳»

تابع $g(x) = \frac{x^۲-۱}{x}\ (x>۰)$ تابعی صعودی و تابع $f(x) = \tan^{-۱}x$ هم صعودی است. بنابراین تابع $fog(x) = \tan^{-۱}(\frac{x^۲-۱}{x})$ نیز تابعی صعودی است.

در نتیجه دنباله‌ی $\{\tan^{-۱}(\frac{n^۲-۱}{n})\}$ دنباله‌ای صعودی است.

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\tan^{-۱}(\frac{n^۲-۱}{n}) = \tan^{-۱}\infty = \frac{\pi}{۲}$$

پس دنباله همگراست.

دقت کنید که برای بررسی یکنوایی می‌توانید از جمله‌ی اول و حد دنباله و مقایسه‌ی آن‌ها نیز استفاده کنید.

۵. گزینه‌ی «۳»

در گزینه‌ی «۳»، به دلیل وجود ریشه‌های مخرج $x = \pm ۱$ که ریشه‌ی صورت هم نیستند، مقادیر تابع در همسایگی این دو نقطه به بی‌نهایت میل می‌کنند و در نتیجه تابع بی‌کران است.

۶. گزینه‌ی «۴»

در گزینه‌ی «۴» داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{۲^n} = ۰ \Rightarrow \text{همگرا به صفر است}$$

در سایر گزینه‌ها هم وضع دنباله‌ها به صورت زیر است:

«۱»: واگرا به ∞ است.

«۲»: همگرا به یک است.

«۳»: همگرا به $\frac{۳}{۴}$ است.

۷. گزینه‌ی «۲»

a_n بی‌کران و نزولی است، بنابراین: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

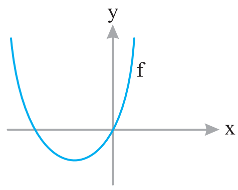
در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}[۱-\frac{۱}{a_n}] = [۱-\frac{۱}{-\infty}] = [۱-(۰^-)]$$
$$= [۱+۰^+] = [۱^+] = ۱ \Rightarrow \text{همگرا به یک است.}$$

۸. گزینه‌ی «۳»

از رسم کمک می‌گیریم. در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$a_n = n^۲ + ۴n = (n+۲)^۲ - ۴$$
$$\Rightarrow f(x) = (x+۲)^۲ - ۴ \Rightarrow$$



همان‌طور که از روی نمودار پیداست نمودار تابع f به ازای $x \ge ۱$ صعودی است (که چون $n \in \mathbb{N}$ پس به ازای $x \ge ۱$ صعودی است) در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز صعودی است.

۹. گزینه‌ی «۱»

دنباله‌ی $\{\frac{n-۱}{۲n+۱}\pi\}$ صعودی است. کم‌ترین مقدار آن صفر و حد آن $\frac{\pi}{۲}$ است. پس دنباله در فاصله‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲})$ تغییر می‌کند. در نتیجه مقادیر دنباله‌ی $\{\cos(\frac{n-۱}{۲n+۱})\pi\}$ از ۱ شروع و به صفر میل می‌کند. در نتیجه این دنباله نزولی است. از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{n-۱}{۲n+۱})\pi = \cos\frac{\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow \text{همگرا به صفر است.}$$

۱۰. گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \lim_{n\to\infty}\log\frac{۱}{n+۱} = \log ۰^+ = -\infty$$

بنابراین دنباله‌ی μ_n از بالا کراندار و از پایین بی‌کران است.

۱۱. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۲n}{۲n+۱})^{\frac{n}{۲}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{۲n+۱-۱}{۲n+۱})^{\frac{n}{۲}} = \lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{۲n+۱})^{\frac{n}{۲}}$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty}(-\frac{۱}{۲n+۱})(\frac{n}{۲})} = e^{-\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{e}}$$

۱۲. گزینه‌ی «۴»

$$[\frac{۱-۲n^۲}{n^۲-۲}]=[\frac{-۲n^۲+۴-۳}{n^۲-۲}]=[\frac{-۲(n^۲-۲)-۳}{n^۲-۲}]$$

$$=[-۲-\frac{۳}{n^۲-۲}] \quad (n\geq ۳)$$

به ازای $n\geq ۳$ مقادیر عبارت داخل جزء صحیح در فاصله‌ی $(-۳,-۲)$ تغییر می‌کنند، بنابراین:

$$[-۲-\frac{۳}{n^۲-۲}]=-۳$$

پس دنباله‌ی داده شده یک دنباله‌ی ثابت و در نتیجه هم صعودی و هم نزولی و همگرا به ۳- است.

۱۳. گزینه‌ی «۴»

با چند جمله‌ی اول، عدد همگرایی دنباله را می‌یابیم:

$$u_۱=\frac{۱}{۹}\,,\,u_۲=\frac{۸}{۲۱}\,,\,u_۳=\frac{۲۱}{۴۱}\,,\,u_۴=\frac{۴۰}{۶۹}\,,\,u_۵=\frac{۶۵}{۱۰۵}$$

از طرفی: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{۳}{۴}$

پس کوچک‌ترین کران بالای دنباله برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۱۴. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{(n+۲)^۲}{۲^n})=۱-۰=۱\Rightarrow$$ کراندار است.

برای بررسی یکنوایی در دنباله‌ی $\{\frac{(n+۲)^۲}{۲^n}\}$ اگر از نسبت $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ استفاده کنیم این نسبت کوچک‌تر از یک خواهد بود در نتیجه:

$\frac{(n+۲)^۲}{۲^n}$:نزولی $\Rightarrow -\frac{(n+۲)^۲}{۲^n}$:صعودی

$\Rightarrow ۱-\frac{(n+۲)^۲}{۲^n}$:صعودی

۱۵. گزینه‌ی «۳»

چون حد دنباله ۱ است داریم:

$$\frac{۹۹}{۱۰۰}<a_n\leq ۱\Rightarrow -\frac{۱}{۱۰۰}<a_n-۱\leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{۱۰۰}<\frac{n+(-۱)^n}{n+۱}-۱\leq ۰\Rightarrow \frac{-۱}{۱۰۰}<\frac{(-۱)^n-۱}{n+۱}\leq ۰$$

به ازای مقادیر زوج n، عبارت $\frac{(-۱)^n-۱}{n+۱}$ برابر صفر می‌شود. پس nهای زوج جواب هستند. به ازای nهای فرد:

$$\frac{-۱}{۱۰۰}<\underbrace{\frac{-۲}{n+۱}<۰}_{\text{همواره برقرار}}\Rightarrow \frac{-۲}{n+۱}>-\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow n+۱>۲۰۰\Rightarrow n>۱۹۹\xrightarrow{n\ \text{فرد}} n\geq ۲۰۱$$

از آنجا که nهای زوج هم جواب بودند، بنابراین به ازای $n\geq ۲۰۰$ دنباله‌ی داده‌شده در بازه‌ی $[۰/۹۹,۱)$ قرار می‌گیرند.

۱۶. گزینه‌ی «۱»

با توجه به نکات دنباله‌ی $\{C^n\}$، باید:

$$-۱<\frac{a+۲}{a-۱}<۱\Rightarrow \left|\frac{a+۲}{a-۱}\right|<۱$$

$$\Rightarrow |a+۲|<|a-۱|\Rightarrow a^۲+۴a+۴<a^۲-۲a+۱$$

$$\Rightarrow ۶a<-۳\Rightarrow a<-\frac{۱}{۲}$$

هم چنین چون توان فرد است برای همگرابودن، پایه می‌تواند (-۱) هم باشد. چون (-۱) به توان هر عدد طبیعی فرد برابر ۱- است. پس:

$$\frac{a+۲}{a-۱}=-۱\Rightarrow a+۲=-a+۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

دقت کنید که $\frac{a+۲}{a-۱}$ برابر یک نمی‌شود، پس به ازای هر $a\in(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ دنباله همگراست.

۱۷. گزینه‌ی «۳»

از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(۳n)((n^۲+۲n-۱)^۲+(n^۲+۲n-۱)(n^۲-n-۱)+(n^۲-n-۱)^۲)}{(۲n+۱)(n+۱)^۴}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۳n(n^۴+n^۴+n^۴)}{(۲n)(n^۴)}=\lim_{n\to\infty}\frac{۹n^۵}{۲n^۵}=\frac{۹}{۲}$$

۱۸. گزینه‌ی «۳»

$$\left(\sqrt{n+۶}-\sqrt{n-۷}\right)\times\frac{\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}}{\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}}=\frac{۱۳}{\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}}$$

دنباله‌ی مخرج یک دنباله‌ی صعودی است و داریم:

$$n>۴۲\Rightarrow n\geq ۴۳:\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}\geq\sqrt{۴۳+۶}+\sqrt{۴۳-۷}$$

$$\Rightarrow\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}\geq ۷+۶=۱۳$$

$$\Rightarrow ۰<\frac{۱}{\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}}\leq\frac{۱}{۱۳}\Rightarrow ۰<\frac{۱۳}{\sqrt{n+۶}+\sqrt{n-۷}}\leq ۱$$

۱۹. گزینه‌ی «۳»

$$\frac{\sin\frac{۱}{n}}{n}=\frac{۱}{n}\sin\frac{۱}{n}$$

دنباله‌های $\{\frac{۱}{n}\}$ و $\{\sin\frac{۱}{n}\}$ مثبت، نزولی و همگرا به صفراند، بنابراین دنباله‌ی $\{\frac{۱}{n}\sin\frac{۱}{n}\}$ نزولی و همگرا به صفر است. پس کراندار و نزولی است.

۲۰. گزینه‌ی «۱»

جملات دنباله‌ی داده شده به صورت زیر است:

$$u_۱=۱\,,\,u_۲=۱+\frac{۱}{۲}\,,\,u_۳=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴},...$$

پس جملات دنباله افزایشی و در نتیجه دنباله، صعودی است. از طرفی دنباله‌ی داده شده، مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱=۱$ و قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u_\infty=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲$$:کراندار