پاسخ آزمون فصل نهم

اصلاحیه: سوال ۲۵: دوتایی $(a,b) \leftarrow$ دوتایی (b,a)

۱. گزینه‌ی «۳»

با توجه به شکل:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[0^-]=-1$$

۲. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{3x+5-2x-6}{(x+3)(3x+5)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x-1}{(x+3)(3x+5)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+3)(3x+5)}=\frac{1}{32}$$

۳. گزینه‌ی «۱»

دنباله‌ی $\frac{1+2n}{n+2}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ همگرا است، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1+2n}{n+2}\right)=\lim_{x\to2^-}f(x)=\left[\frac{2^-}{2}\right]+2=[1^-]+2=0+2=2$$

۴. گزینه‌ی «۲»

خط گذرنده از مبدا مختصات را به صورت $y=ax$ درنظر می‌گیریم.

بنابراین: $x^3+x+1=ax \Rightarrow x^3+(1-a)x+1=0$

حالا از قضیه‌ی بولتزانو در بازه‌ی $(-1,1)$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases}f(1)=3-a\\ f(-1)=a-1\end{cases}\to(3-a)(a-1)<0\Rightarrow a>3 \text{ یا } a<1$$

$$\Rightarrow a\in\mathbb{R}-[1,3]$$

۵. گزینه‌ی «۴»

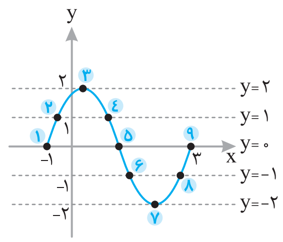
تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=\frac{\frac{2x-1}{x+2}+3}{2\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)+1}=\frac{\frac{5x+5}{x+2}}{\frac{5x}{x+2}}=1+\frac{1}{x}$$

بنابراین تابع یک مجانب افقی $y=1$ و یک مجانب قائم $x=0$ دارد، پس نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های به صورت $(0,1)$ است.

۶. گزینه‌ی «۳»

از نمودار تابع $[f(x)]$ استفاده می‌کنیم:



با توجه به شکل بالا، تابع $[f(x)]$ تنها در نقاط ① و ⑦ پیوسته است و در ۷ نقطه‌ی دیگر ناپیوسته است.

۷. گزینه‌ی «۲»

$$x\to+\infty: f(x)=2x+1-\sqrt{x^2-2x}\underset{x\to+\infty}{\sim}(2x+1)-|x-1|$$

$=(2x+1)-(x-1)=x+2\Rightarrow y=x+2$ مجانب مایل:

$$x\to-\infty: f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+2x}\underset{x\to-\infty}{\sim}(2x+1)-|x+1|$$

$=(2x+1)+(x+1)=3x+2\Rightarrow y=3x+2$ مجانب مایل:

حالا نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{cases}y=x+2\\ y=3x+2\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} x=0,\ y=2$$

۸. گزینه‌ی «۴»

از هم‌ارزی $\pi-\cos^{-1}u \underset{u\to(-1)^+}{\sim}\sqrt{1-u^2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\pi-\cos^{-1}(x^2-1)}{x^2-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-x^4+2x^2-1}}{x^2-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2(2-x^2)}}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sqrt{(2-x^2)}}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{(2-x^2)}}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2-x^2}}{x-1}$$

$$=-\sqrt{2}$$

۹. گزینه‌ی «۴»

قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-3x)-(3x+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-6x}{x}=-6$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^-}[f(f(x))]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x-2+3}{x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[2+\frac{3}{x-1}\right]=[2+(0^-)]=[2^-]=1$$

۱۱. گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to+\infty}[x]\sin^{-1}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\sin^{-1}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\infty\times0$$

با هم‌ارزی $\sin^{-1}u\underset{u\to0}{\sim}u$ حل را ادامه می‌دهیم:

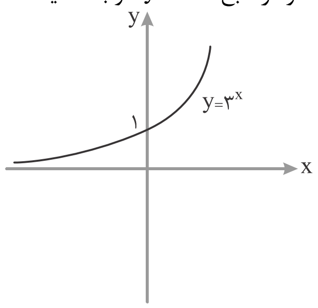
$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

۱۲. گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to0^-}\frac{[\tan x]}{3^{-x}-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{[0^-]}{3^{-x}-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{3^{-x}-1}=\frac{-1}{3^{0^+}-1}$$

$$=\frac{-1}{1^+-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

برای درک بهتر به نمودار تابع $y=3^x$ توجه کنید:



۱۳. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to ۰} x\left(\frac{۱}{\sin x}-\left[\frac{۱}{\sin x}\right]\right)=\text{(صفر) (عبارت کراندار)}=۰$$

یادآوری: $۰\le u-[u]<۱$

۱۴. گزینه‌ی «۳»

از هم‌ارزی $(۱-\frac{x^۲}{۲})\underset{x\to ۰}{\sim}\cos x$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\frac{x^۲}{۲})(۱-\frac{۹x^۲}{۲})-۱}{\sqrt{x^۲+۴}-۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\frac{۹x^۲}{۲}-\frac{x^۲}{۲}+\frac{۹x^۴}{۴})-۱}{\sqrt{x^۲+۴}-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۹x^۴}{۴}-۵x^۲}{\sqrt{x^۲+۴}-۲}$$

حالا با گویاکردن داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x^۲(\frac{۹x^۲}{۴}-۵)}{x^۲}\times(\sqrt{x^۲+۴}+۲)\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}(\frac{۹x^۲}{۴}-۵)(\sqrt{x^۲+۴}+۲)=-۲۰$$

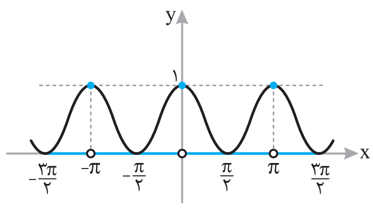
۱۵. گزینه‌ی «۴»

ابتدا براکت را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{۱}{x}\right]\cot\frac{۱}{x}=\lim_{x\to-\infty}[۰^-]\cot\frac{۱}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\cot\frac{۱}{x}=-\cot ۰^-$$
$$=-(-\infty)=+\infty$$

۱۶. گزینه‌ی «۴»

از رسم نمودار تابع $y=[\cos^۲ x]$ استفاده می‌کنیم:



با توجه به شکل، تابع $y=[\cos^۲ x]$ در بازه‌های $(-\pi,۰)$، $(۰,\pi)$ و ... پیوسته است. هم‌چنین در تابع $f(x)=x[\cos^۲ x]$ به علت وجود تابع $y=x$، f در $x=۰$ هم پیوسته است (عامل صفرشونده است.) بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که f در آن پیوسته است به صورت $(-\pi,\pi)$ است.

۱۷. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to ۰^+}\left[\frac{۲x+۳}{x-۱}\right]$$

با فرض $f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۱}$ داریم:

$$\begin{cases}f(۰)=-۳\\ f'(x)=\frac{-۵}{(x-۱)^۲}\Rightarrow f'(۰)=-۵\end{cases}$$

با توجه به منفی‌بودن مقدار مشتق، اگر x با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک شود، f با مقادیر کمتر از (۳-) به (۳-) نزدیک می‌شود، درنتیجه:

$$\lim_{x\to ۰^+}\left[\frac{۲x+۳}{x-۱}\right]=[(-۳)^-]=-۴$$

۱۸. گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲}=۲\Rightarrow y=۲ :\text{مجانب افقی}$$

برای محاسبه‌ی مجانب قائم ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

$$x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۲$$

$x=۱$ ریشه‌ی صورت هم هست (ساده میشن). پس $x=-۲$ تنها مجانب قائم تابع است. پس نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها، نقطه‌ی $(-۲,۲)$ است. چون خط $y=x+a$ از این نقطه می‌گذرد، بنابراین:

$$۲=-۲+a\Rightarrow a=۴$$

۱۹. گزینه‌ی «۳»

ریشه‌ی مخرج: $x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm ۱$

اما $x=-۱$ عبارت زیر رادیکال $(\sqrt{x})$ را منفی می‌کند. پس تابع یک مجانب قائم $x=۱$ دارد. از طرفی:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^۲-۱}+\tan^{-۱}\sqrt{x}}{x^۲-۱}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^۲}+\frac{\pi}{۲}}{x^۲-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{x|x|+\frac{\pi}{۲}}{x^۲-۱}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۲}=۱\Rightarrow y=۱\ \text{مجانب افقی}$$

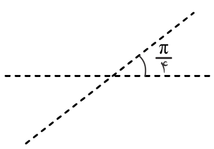
۲۰. گزینه‌ی «۳»

ابتدا مجانب‌ها را می‌یابیم. از هم‌ارزی رادیکالی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۲x-\sqrt{۴x^۲-۴x}}{۴}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{۲x-۲\left|x-\frac{۱}{۲}\right|}{۴}$$

$$=\begin{cases}\frac{۲x-۲x+۱}{۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=\frac{۱}{۴} & \text{مجانب افقی:}\\ x\to+\infty & \\ \frac{۲x+۲x-۱}{۴}=x-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=x-\frac{۱}{۴} & \text{مجانب مایل:}\\ x\to-\infty & \end{cases}$$

شیب خط مجانب افقی $m=۰$ است و شیب خط مجانب مایل $m=۱$ است. پس زاویه‌ی بین مجانب‌ها $\frac{\pi}{۴}$ است:



۲۱. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{-۲\tan x(۱+\tan^۲ x)}{-۲\sin ۲x}$$
$$=\frac{(-۲)(۱)(۱+۱)}{-۲(۱)}=۲$$

بنابراین باید:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} a\cos ۳x = a\cos\frac{۳\pi}{۴} = a(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = -۲\sqrt{۲}$$

۲۲. گزینه‌ی «۳»

تابع $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است. بنابراین:

$$\begin{array}{c|ccc} x & ۱ & & k \\ y & ۱ & \nearrow & ۲ \end{array} \Rightarrow \sqrt{k}=۲ \Rightarrow k=۴$$

۲۳. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲-۱}-\sin x}{|-۲x|+۱} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{|-۲x|}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲}}{|۲x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{۲|x|} = \frac{۱}{۲}$$

یادآوری: $|-u|=|u|$

۲۴. گزینه‌ی «۴»

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^۳-۱۰}{x(x-۲)^۲}} = ۱ \Rightarrow y=۱:$ مجانب افقی

برای یافتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

مجانب قائم: $x=۰ \xrightarrow{\text{حد چپ } (+\infty) \text{ است}} x=۰$

حد چپ و راست تعریف نمی‌شود: $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

پس تابع یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد.

۲۵. گزینه‌ی «۳»

با توجه به ضابطه‌ی $sgn(u)=\begin{cases} ۱ & u>۰ \\ ۰ & u=۰ \\ -۱ & u<۰ \end{cases}$ تابع در نقاطی که $u=۰$ است ناپیوسته است. بنابراین:

$$x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x=۱ , x=-۲$$

پس در این نقاط باید عبارت $x^۲-bx+a$ عامل صفرشونده برای تابع sgn باشد:

$$x=۱: (۱)^۲-b+a=۰ \Rightarrow b-a=۱$$

$$x=-۲: (-۲)^۲+۲b+a=۰ \Rightarrow ۲b+a=-۴$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} b=-۱ , a=-۲$$

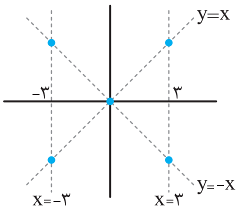
۲۶. گزینه‌ی «۴»

تابع دو مجانب قائم $x=\pm۳$ دارد. از طرفی:

$$\sqrt{\frac{x^۴+۱}{x^۲-۹}} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{x^۲} = |x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty : y=x & \text{مجانب مایل} \\ x\to-\infty : y=-x & \text{مجانب مایل} \end{cases}$$

پس نمودار مجانب‌ها به صورت زیر است: با توجه به شکل، مجانب‌ها در ۵ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



۲۷. گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to۰}(x^۳-mx^۲-n)[\frac{۱}{x^۲}] = \lim_{x\to۰}\frac{x^۳-mx^۲-n}{x^۲} = ۲$$

چون حد مخرج صفر است باید حد صورت هم صفر باشد تا حد عبارت عددی حقیقی شود:

$$\Rightarrow \lim_{x\to۰}(x^۳-mx^۲-n)=۰ \Rightarrow n=۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۰}\frac{x^۳-mx^۲}{x^۲}=۲ \Rightarrow \lim_{x\to۰}\frac{(x-m)x^۲}{x^۲}=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۰}(x-m)=۲ \Rightarrow m=-۲ \Rightarrow m-n=-۲$$

۲۸. گزینه‌ی «۴»

ابهام از نوع $\frac{۰}{۰}$ است، از هوپیتال برای حل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۳\cos^۲x(-\sin x)}{\frac{-\sin x}{۲\sqrt{۲+\cos x}}} = \lim_{x\to\pi} ۳\cos^۲x(۲\sqrt{۲+\cos x})$$

$$=۳(-۱)^۲(۲\sqrt{۲-۱})=۶$$

۲۹. گزینه‌ی «۲»

از هوپیتال برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{\tan ۲x-\cot x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{-\cos(\frac{\pi}{۲}-x)}{۲(۱+\tan^۲ ۲x)+(۱+\cot^۲ x)}$$

$$=\frac{-۱}{۲(۱+۰)+(۱+۰)} = -\frac{۱}{۳}$$

۳۰. گزینه‌ی «۴»

ابهام $\infty-\infty$ است. برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to۲}(\frac{۱}{۴(x-۲)}-\frac{۱}{(x-۲)(x+۲)}) = \lim_{x\to۲}(\frac{x+۲-۴}{۴(x-۲)(x+۲)})$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{۱}{۴(x+۲)} = \frac{۱}{۱۶}$$