فصل اول

آمار و مدلسازی

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه‌ی «۳»

فزونی فراوانی تجمعی دسته‌ی پنجم از فراوانی تجمعی دسته‌ی چهارم برابر است با: $F_۵ - F_۴ = f_۵$ (فراوانی مطلق دسته‌ی پنجم)

چون فراوانی نسبی دسته‌ی پنجم در ۱۲۰ داده برابر ۰/۱۵ است پس:

$$۰/۱۵ = \frac{f_۵}{۱۲۰} \Rightarrow f_۵ = ۱۸$$

بنابراین: $F_۵ - F_۴ = ۱۸$

۲. گزینه‌ی «۱»

در نمودار دایره‌ای: $\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ$

$$\Rightarrow ۳۶^\circ = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{f_i}{n} = \frac{۱}{۱۰}$$

پس ۱۰٪ داده‌ها با زاویه‌ی ۳۶° نمایش داده می‌شود.

۳. گزینه‌ی «۴»

$$\text{قطر} = ۱۰ + E$$

چون خطای اندازه‌گیری قطر کم‌تر از $\frac{۱}{۶\pi}$ است، بنابراین:

$$|E| < \frac{۱}{۶\pi} \qquad (*)$$

در نتیجه مدل مساحت برابر است با:

$$\text{مساحت} = \frac{\pi(\text{قطر})^۲}{۴} = \frac{\pi(۱۰+E)^۲}{۴}$$

$$= \frac{\pi(۱۰۰ + ۲۰E + E^۲)}{۴} \simeq ۲۵\pi + ۵\pi E$$

خطای اندازه‌گیری مساحت $۵\pi E$ است. در نتیجه با توجه به $(*)$:

$$|E| < \frac{۱}{۶\pi} \Rightarrow |۵\pi E| < \frac{۵\pi}{۶\pi} \Rightarrow |۵\pi E| < \frac{۵}{۶}$$

۴. گزینه‌ی «۳»

درصد فراوانی نسبی دسته‌ی ششم =

(درصد فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی ششم) − (درصد فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی پنجم)

$$\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی دسته‌ی ششم} = ۷۷ - ۶۲ = ۱۵$$

$$\Rightarrow \frac{f_۶}{n} = \frac{۱۵}{۱۰۰} \xrightarrow{n=۸۰} f_۶ = ۸۰\left(\frac{۱۵}{۱۰۰}\right) = ۱۲$$

ارتفاع ستون ششم در نمودار مستطیلی همان فراوانی این دسته و برابر ۱۲ است.

۵. گزینه‌ی «۴»

مقدار مشترک در دسته‌ی پنجم یعنی همان مرکز دسته‌ی پنجم

$$\text{طول دسته‌ها} = \frac{\text{دامنه‌ی تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{۸۶ - ۶۵}{۷} = \frac{۲۱}{۷} = ۳$$

پس دسته‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$[۶۵,۶۸),[۶۸,۷۱),[۷۱,۷۴)[۷۴,۷۷),\underbrace{[۷۷,۸۰)}_{\text{دسته‌ی پنجم}},...$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دسته‌ی پنجم} = \frac{۷۷+۸۰}{۲} = ۷۸/۵$$

۶. گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم: $F_۵ - F_۴ = f_۵$

$$\Rightarrow ۴۶ - ۳۴ = f_۵ \Rightarrow f_۵ = ۱۲$$

حالا زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی پنجم در نمودار دایره‌ای را می‌یابیم:

$$\alpha_۵ = \frac{f_۵}{n} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha_۵ = \frac{۱۲}{۹۶} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۳۶۰^\circ}{۸} = ۴۵^\circ$$

۷. گزینه‌ی «۲»

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ = \frac{f_i}{۱۰۸} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{f_i}{۱۰۸} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow f_i = \frac{۱۰۸}{۶} = ۱۸$$

پس فراوانی مطلق دسته‌ی $۴۲ - ۳۶$ برابر ۱۸ است. چون مرکز این دسته برابر ۳۹ است پس نقطه‌ی $(۳۹,۱۸)$ روی نمودار چندبر است.

۸. گزینه‌ی «۴»

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی سوم} = \frac{x+۱}{(x+۱)+(۳x+۱)+(x+۱)+(x-۱)} = \frac{۲}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۱}{۶x+۲} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow ۱۰x + ۱۰ = ۱۲x + ۴$$

$$\Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

بنابراین فراوانی مطلق دسته‌ی دوم برابر است با:

$$\text{فراوانی مطلق دسته‌ی دوم} = ۳x + ۱ = ۳(۳) + ۱ = ۱۰$$

۹. گزینه‌ی «۱»

اصلاحیه: در صورت سوال کلمه‌ی درصد حذف شود.

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی سوم} = ۰/۲۵ \Rightarrow \frac{f_۳}{n} = ۰/۲۵ \qquad (*)$$

$$\text{فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی سوم} = \frac{F_۳}{n} = \frac{۱۱}{۲۰} \qquad (**)$$

فراوانی دسته‌ی دوم دو برابر فراوانی دسته‌ی اول: $f_۲ = ۲f_۱ \Rightarrow f_۱ = \frac{f_۲}{۲} \quad (***)$

با توجه به $(**)$:

$$\frac{f_۱ + f_۲ + f_۳}{n} = \frac{۱۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{f_۱ + f_۲}{n} + \frac{f_۳}{n} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{f_۱ + f_۲}{n} + ۰/۲۵ = \frac{۱۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{f_۱ + f_۲}{n} = \frac{۱۱}{۲۰} - \frac{۱}{۴} = \frac{۶}{۲۰}$$

و بالاخره با توجه به $(***)$:

$$\frac{\frac{f_۲}{۲} + f_۲}{n} = \frac{۶}{۲۰} \Rightarrow \frac{\frac{۳f_۲}{۲}}{n} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\left(\frac{f_۲}{n}\right) = \frac{۳}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{f_۲}{n} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow \text{فراوانی نسبی دسته‌ی دوم} = ۰/۲$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

بدون شرح!

۱۱. گزینه‌ی «۲»

$$\text{میانگین ۴ درس} = ۱۵/۵ = \frac{\sum x_i}{۴} \Rightarrow \sum x_i = ۶۲$$

نمره‌ی درس دیگر را برابر y در نظر می‌گیریم.

$\text{میانگین جدید}=۱۶/۵\Rightarrow\frac{\sum x_i+۲y}{۴+۲}=۱۶/۵$

$\Rightarrow\frac{۶۲+۲y}{۶}=۱۶/۵\Rightarrow ۶۲+۲y=۹۹$

$\Rightarrow ۲y=۳۷\Rightarrow y=۱۸/۵$

۱۲. گزینه‌ی «۲»

$\text{میانگین ۱۲ داده}=۱۰/۵\Rightarrow\frac{\sum x_i}{۱۲}=۱۰/۵\Rightarrow\sum x_i=۱۲۶$

هر یک از ۸ داده‌ی مساوی را برابر y در نظر می‌گیریم:

$\text{مجموع داده‌های جدید}=\sum x_i+۸y$

میانگین ۲۰ داده برابر ۹/۹ شده است:

$۹/۹=\frac{\sum x_i+۸y}{۲۰}\Rightarrow ۱۹۸=\sum x_i+۸y$

$\Rightarrow ۱۹۸=۱۲۶+۸y\Rightarrow ۷۲=۸y\Rightarrow y=۹$

۱۳. گزینه‌ی «۴»

اگر طول ضلع مربع‌ها را برابر x_i در نظر بگیریم:

$\textbf{میانگین محیط مربع‌ها}=\frac{۴\sum x_i}{n}\Rightarrow ۸۴=\frac{۴\sum x_i}{n}\Rightarrow\frac{\sum x_i}{n}=۲۱$

$\Rightarrow\bar{x}=۲۱$

میانگین مساحت مربع‌ها هم برابر ۴۹۰ است. بنابراین: $\frac{\sum x_i^۲}{n}=۴۹۰$

حالا برای محاسبه‌ی ضریب تغییرات در طول ضلع مربع‌ها ابتدا واریانس را می‌یابیم:

$\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲=۴۹۰-(۲۱)^۲=۴۹$

$\Rightarrow\sigma=۷:\ \text{انحراف معیار}$

$\Rightarrow\text{ضریب تغییرات}=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳$

۱۴. گزینه‌ی «۳»

چون انحراف معیار ۱۲ داده برابر صفر است پس همه‌ی داده‌ها با هم برابرند. چون مجموع مجذور داده‌ها برابر ۳۰۰ است، بنابراین:

$۱۲x^۲=۳۰۰\Rightarrow x^۲=۲۵\Rightarrow x=۵$

چون همه‌ی داده‌ها برابر ۵ هستند پس مد نیز برابر ۵ است.

۱۵. گزینه‌ی «۲»

$\text{میانگین}=۵\xrightarrow{\text{۱ واحد به داده‌ها اضافه شود}}\text{میانگین}=۶$

$\text{واریانس}=۴\xrightarrow{\text{۱ واحد به داده‌ها اضافه شود}}\text{واریانس}=۴\Rightarrow\text{انحراف معیار}=۲$

$\text{درصد ضریب تغییرات جدید}=\frac{۲}{۶}\times۱۰۰=\frac{۱}{۳}\times۱۰۰\simeq۳۳\%$

۱۶. گزینه‌ی «۳»

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$۷,۷,\underbrace{۸,۹}_{Q_۱=۸/۵},۱۰,۱۱,۱۲,۱۲,\underbrace{۱۳,۱۴}_{Q_۳=۱۳/۵},۱۴,۱۵$

پس داده‌های داخل جعبه عبارتند از:

$۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۲,۱۳\Rightarrow\text{میانه}=\frac{۱۱+۱۲}{۲}=۱۱/۵$

۱۷. گزینه‌ی «۴»

$\text{واریانس}=۱۰/۲۴\Rightarrow\text{انحراف معیار}=\sqrt{۱۰/۲۴}=۳/۲$

$\text{ضریب تغییرات}=\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}\Rightarrow ۰/۰۸=\frac{۳/۲}{\text{میانگین}}$

$\Rightarrow\text{میانگین}=\frac{۳/۲}{۰/۰۸}=۴۰=\frac{\sum x_i}{n}$

چون تعداد داده‌ها برابر ۸۵ است، بنابراین:

$\frac{\sum x_i}{۸۵}=۴۰\Rightarrow\sum x_i=۳۴۰۰$

۱۸. گزینه‌ی «۳»

بدون توجه به x، داده‌ها به صورت زیر مرتب می‌شوند:

$۲۰,۳۰,۵۰,۶۰,۹۰,۱۱۰$

برای اینکه مد داشته باشیم باید x با یکی از داده‌ها برابر باشد. برای اینکه مد و میانه با هم برابر باشند باید x برابر ۵۰ یا برابر ۶۰ باشد. از طرفی:

$x=۵۰:\ \text{میانگین}=\frac{۲۰+۳۰+۵۰+۵۰+۶۰+۹۰+۱۱۰}{۷}=\frac{۴۱۰}{۷}$

$x=۶۰:\ \text{میانگین}=\frac{۲۰+۳۰+۵۰+۶۰+۶۰+۹۰+۱۱۰}{۷}=۶۰$

پس اگر $x=۶۰$ باشد، میانگین، میانه و مد برابرند پس داده‌ها و چارک‌های اول و سوم آن‌ها به صورت زیر است:

$۲۰,\underbrace{۳۰}_{Q_۱},۵۰,۶۰,۶۰,\underbrace{۹۰}_{Q_۳},۱۱۰$

$\Rightarrow Q_۱+Q_۳=۱۲۰$

۱۹. گزینه‌ی «۳»

اگر ضریب تغییرات داده‌های $x_۱,x_۲,\dots,x_n$ را برابر $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه میانگین داده‌ها ۸ است بنابراین ضریب تغییرات $\frac{\sigma}{۸}$ است. پس ضریب تغییرات داده‌های $x_۱+۴,x_۲+۴,\dots,x_n+۴$ برابر $\frac{\sigma}{۸+۴}=\frac{\sigma}{۱۲}$ و ضریب تغییرات داده‌های $x_۱+a,x_۲+a,\dots,x_n+a$ برابر $\frac{\sigma}{۸+a}$ خواهد بود. از آنجا که ضریب تغییرات داده‌های دسته‌ی اول ۲ برابر ضریب تغییرات داده‌های دسته‌ی دوم است:

$\frac{\sigma}{۱۲}=۲(\frac{\sigma}{۸+a})\Rightarrow\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۸+a}\Rightarrow ۸+a=۲۴\Rightarrow a=۱۶$

۲۰. گزینه‌ی «۱»

داده	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی تجمعی	۷	۱۵	۲۱	۳۵	۴۰
فراوانی مطلق	۷	۸	۶	۱۴	۵

با توجه به جدول فراوانی مطلق: مد $=۱۸$

هم‌چنین برای محاسبه‌ی میانگین از داده‌ها ۱۶ واحد (داده‌ی وسط) را کم می‌کنیم:

داده‌ی جدید	-۴	-۲	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۷	۸	۶	۱۴	۵

$\Rightarrow\text{میانگین جدید}=\frac{-۲۸-۱۶+۰+۲۸+۲۰}{۴۰}=\frac{۱}{۱۰}$

$\Rightarrow\text{میانگین اصلی}=۱۶+\frac{۱}{۱۰}=۱۶/۱$

$\Rightarrow\text{تفاوت میانگین و مد}=۱۸-۱۶/۱=۱/۹$