فصل دهم
مشتق و کاربردها
بانک سوالات

۱. گزینه‌ی «۴»

معادله‌ی تلاقی منحنی با محور xها $(y=0)$ باید ریشه‌ی مکرر داشته باشد:

$$\frac{2\cos x+a}{\cos x-1}=0\Rightarrow 2\cos x+a=0\Rightarrow \cos x=-\frac{a}{2}$$

چون $\cos x=\pm 1$ ریشه‌ی مکرر دارد پس:

$$-\frac{a}{2}=\pm 1\Rightarrow a=\pm 2$$

اگر $a=-2$ باشد عبارت به صورت $y=\frac{2(\cos x-1)}{\cos x-1}=2$ در می‌آید که بر محور xها مماس نیست. پس فقط $a=-2$ قابل قبول است.

۲. گزینه‌ی «۴»

چون نقطه‌ی ماکزیمم روی محور عرض‌هاست پس طول ماکزیمم نسبی تابع، صفر است. پس $x=0$ مشتق را صفر می‌کند:

$$y'=3x^2+2ax+b=0\xrightarrow{x=0}b=0$$

پس گزینه‌های «۲» یا «۴» صحیح هستند. چون تابع بر محور xها مماس است، ریشه‌ی مشتق در خود تابع نیز صدق می‌کند پس با توجه به گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۲»: $a=3\Rightarrow y=x^3+3x^2+4$

$$y'=3x^2+6x=0\Rightarrow x=0,-2$$

چون $x=-2$ ریشه‌ی خود تابع نیست پس این گزینه غلط است و گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۳. گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}\Rightarrow f'g-g'f=\left(\frac{f}{g}\right)'.g^2$$

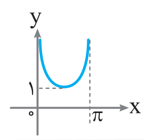
پس اول $\frac{f}{g}$ را محاسبه می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم و در g^2 ضرب می‌کنیم:

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x^2-(x^2+1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=0\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'.g^2=0$$

۴. گزینه‌ی «۱»

نمودار تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ در بازه‌ی $(0,\pi)$ به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع در این فاصله تقعر رو به بالا دارد.



۵. گزینه‌ی «۳»

اول fof را تشکیل می‌دهیم و سپس مشتق می‌گیریم:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{3-2x}{x+2}\right)=\frac{3-2\left(\frac{3-2x}{x+2}\right)}{\frac{3-2x}{x+2}+2}$$

$$\Rightarrow (f\circ f)(x)=\frac{\frac{3x+6-6+4x}{x+2}}{\frac{3-2x+2x+4}{x+2}}=\frac{7x}{7}=x\Rightarrow (f\circ f)'(x)=1$$

۶. گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\sqrt{\tan 3x}+\cos^2 x\Rightarrow f'(x)=\frac{3(1+\tan^2 3x)}{2\sqrt{\tan 3x}}+(-\sin 2x)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}}}+\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3(1+1)}{2\sqrt{1}}-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

۷. گزینه‌ی «۴»

چون تابع کسری گویاست و $x=0$ نقطه‌ی عطف تابع است پس در $x=0$ تابع ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد دارد، در نتیجه: $a=0$. پس:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+bx+1}$$

تابع بالا یک مجانب مایل دارد. چون تابع فقط دو مجانب دارد پس مخرج باید تنها یک ریشه داشته باشد (تنها یک مجانب قائم). پس:

$$x^2+bx+1=0\xrightarrow{\Delta=0}b^2-4=0\Rightarrow b=\pm 2$$

با فرض $b=-2$:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\frac{x^3}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)x^2(3(x-1)-2x)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=3,x=0$$

تابع f' در $x=3$ تغییر علامت می‌دهد (چون توان ریشه ۱ است) پس $x=3$ طول نقطه‌ی اکسترمم است. بنابراین با توجه به صورت سؤال که طول نقطه‌ی اکسترمم غیر منفی است پس همین b قابل قبول است. پس: $a=0,b=-2$

۸. گزینه‌ی «۴»

$$x+y=3\Rightarrow y=3-x\quad (*)$$

$$S=x\sqrt{y^2-x^2}\xrightarrow{(*)}S=x\sqrt{(3-x)^2-x^2}$$

$$\Rightarrow S=x\sqrt{9+x^2-6x-x^2}\Rightarrow S=x\sqrt{9-6x}\quad (**)$$

$$\Rightarrow S'_x=\sqrt{9-6x}+x\frac{-6}{2\sqrt{9-6x}}=0$$

$$\Rightarrow\frac{2(9-6x)-6x}{2\sqrt{9-6x}}=0\Rightarrow 18-18x=0\Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow S_{max}=(1)\sqrt{9-6(1)}=\sqrt{3}$$

۹. گزینه‌ی «۳»

$$3x^2+2y^2-6x+4y=0 \xrightarrow[\text{به زمان}]{\text{مشتق نسبت}} 6xx'_t+4yy'_t-6x'_t+4y'_t=0$$

$$\begin{cases}(2,-2) \Rightarrow x=2, y=-2 \\ y_{\text{سرعت}}=0/06 \Rightarrow y'_t=0/06\end{cases}$$

$$\Rightarrow 6(2)x'_t+4(-2)(0/06)-6x'_t+4(0/06)=0$$

$$\Rightarrow 6x'_t-0/48+0/24=0 \Rightarrow 6x'_t=0/24 \Rightarrow x'_t=0/04$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

ضابطه‌ی بالا در بازه‌ی $[-4,4]$ در نقطه‌ی درونی $x=3$ ناپیوسته و در نتیجه بحرانی است. در ضابطه‌ی پایین:

$$f(x)=x^2-3x \Rightarrow f'(x)=2x-3=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2} \xrightarrow{x<2} \text{ق.ق} \Rightarrow x=\frac{3}{2} :\text{بحرانی}$$

در نقطه‌ی مرزی $x=2$ هم تابع ناپیوسته و در نتیجه بحرانی است.
پس تابع f سه نقطه‌ی بحرانی دارد.

۱۱. گزینه‌ی «۲»

نقطه‌ی تماس را $(a,f(a))$ در نظر می‌گیریم:

$$y=\frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} y'=\frac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(a)=\frac{-7}{(a-2)^2} \\ f(a)=\frac{3a+1}{a-2}\end{cases}$$

پس:

$$\text{معادله‌ی خط مماس}: y-\frac{3a+1}{a-2}=\frac{-7}{(a-2)^2}(x-a)$$

نقطه‌ی $(2,5)$ روی خط قرار دارد:

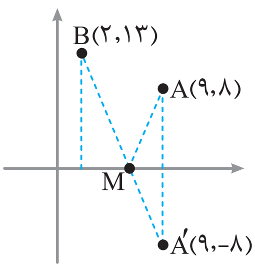
$$5-\frac{3a+1}{a-2}=\frac{-7}{(a-2)^2}(2-a)$$

$$\Rightarrow \frac{5a-10-3a-1}{(a-2)}=\frac{7}{(a-2)^2}(a-2)$$

$$\Rightarrow 2a-11=7 \Rightarrow a=9 \Rightarrow \text{تنها یک مماس می‌توان رسم کرد.}$$

۱۲. گزینه‌ی «۲»

می‌خواهیم $AM+BM$ می‌نیمم شود پس قرینه‌ی A را نسبت به محور x ها محاسبه می‌کنیم: $A'(9,-8)$.



چون طول AM و $A'M$ یکسان است پس کافیست می‌نیمم $A'M+BM$ را محاسبه کنیم. برای این اتفاق باید BM و $A'M$ در یک راستا باشند چون M روی محور x هاست مختصات آن را $M(a,0)$ در نظر می‌گیریم:

$$\text{شیب}_{A'M}=\text{شیب}_{BM} \Rightarrow \frac{y_M-y_{A'}}{x_M-x_{A'}}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}$$

$$\Rightarrow \frac{0-(-8)}{a-9}=\frac{0-13}{a-2} \Rightarrow 8a-16=-13a+117$$

$$\Rightarrow 21a=133 \Rightarrow 3a=19 \Rightarrow a=\frac{19}{3}$$

۱۳. گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=x^2+\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x)=x^2+x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=2x+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=2-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=2-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0 \Rightarrow 2=\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^4}=\frac{1}{9} \Rightarrow x^4=(\frac{1}{9})^3 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{(\frac{1}{9})^3} \Rightarrow$$

تابع دو نقطه‌ی عطف دارد.
دقت کنید که $x=0$ ریشه‌ی مخرج است و چون توان ریشه ۴ است پس مشتق دوم تغییر علامت نمی‌دهد در نتیجه عطف نیست.

۱۴. گزینه‌ی «۱»

اول کم‌ترین مقدار $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f'(x)=6x-6=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=3-6=-3$$

پس کم‌ترین مقدار $f(x)$ برابر -3 است. چون در $f(1-2x)$ تغییرات عرضی نداریم پس کم‌ترین مقدار این تابع هم -3 است.

۱۵. گزینه‌ی «۳»

ابتدا نقطه‌ی تلاقی خط و منحنی را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y+2x=1 \\ y=\sqrt{x+1}\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1}+2x=1 \Rightarrow x=0$$

شیب خط برابر -2 است. در $x=0$ شیب مماس بر تابع $y=\sqrt{x+1}$ را می‌یابیم:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow y'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب مماس}=\frac{1}{2}$$

چون حاصل‌ضرب شیب‌ها برابر -1 است، بنابراین زاویه‌ی بین مماس‌ها 90° است.

۱۶. گزینه‌ی «۲»

تلاقی خط و منحنی باید ریشه‌ی مکرر داشته باشد:

$$\frac{\sin x-\sqrt{2}}{\cos x}=a \Rightarrow \sin x-\sqrt{2}=a\cos x \Rightarrow \sin x-a\cos x=\sqrt{2}$$

برای اینکه معادله‌ی بالا ریشه‌ی مکرر داشته باشد باید

$$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{2} \Rightarrow 1+a^2=2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۱۷. گزینه‌ی «۲»

تابع بر محورهای مختصات مجانب است یعنی خطوط $x=0$ و $y=0$ مجانب‌های تابع هستند. $y=0$ که حتماً مجانب تابع است. $x=0$ باید ریشه‌ی مخرج باشد:

$$0+4b-1=0 \Rightarrow b=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{ax+1}{x^3}$$

از طرفی $x=2$ طول می‌نیمم نسبی تابع است پس:

$$y'(2)=0 \Rightarrow y'=\frac{ax^3-3x^2(ax+1)}{(x^3)^2}$$

$$\Rightarrow y'(2)=\frac{8a-12(2a+1)}{(8)^2}=0$$

$$\Rightarrow 8a-24a-12=0 \Rightarrow -16a-12=0$$

$$\Rightarrow a=-\frac{3}{4} \Rightarrow a-b=-1$$

۱۸. گزینه‌ی «۳»

چون بیشترین مقدار x را می‌خواهیم، ابتدا معادله‌ی x برحسب y را می‌یابیم. بنابراین از حل معادله‌ی درجه دوم استفاده می‌کنیم

$(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a})$

$$x^۲ + xy + y^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-y \pm \sqrt{y^۲ - ۴(y^۲ - ۳)}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-y \pm \sqrt{-۳y^۲ + ۱۲}}{۲} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow x'_y = \frac{-۱ \pm \dfrac{-۶y}{۲\sqrt{-۳y^۲ + ۱۲}}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -۱ \pm \frac{۳y}{\sqrt{-۳y^۲ + ۱۲}} = ۰ \Rightarrow \pm \frac{۳y}{\sqrt{-۳y^۲ + ۱۲}} = ۱ \quad (**)$$

$$\Rightarrow \pm ۳y = \sqrt{-۳y^۲ + ۱۲} \xrightarrow{\text{به توان۲}} ۹y^۲ = -۳y^۲ + ۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۲y^۲ = ۱۲ \Rightarrow y^۲ = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$$

با قرار دادن در $(*)$:

$$y = ۱ : x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۹}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۱ + ۳}{۲} = ۱ \\ x_۲ = \dfrac{-۱ - ۳}{۲} = -۲ \end{cases}$$

$$y = -۱ : x = \frac{۱ \pm \sqrt{۹}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۳ = \dfrac{۱ + ۳}{۲} = ۲ \\ x_۴ = \dfrac{۱ - ۳}{۲} = -۱ \end{cases}$$

پس بیشترین مقدار x برابر ۲ است.

۱۹. گزینه‌ی «۱»

$$gof(x) = \sin(\pi(x - [x]))$$

می‌دانیم $۰ \le x - [x] < ۱$ پس: $۰ \le \pi(x - [x]) < \pi$

در نتیجه با توجه به وجود سینوس، کم‌ترین مقدار زمانی رخ می‌دهد که $\pi(x - [x])$ برابر صفر باشد:

$$\pi(x - [x]) = ۰ \Rightarrow x - [x] = ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

پس در نقاط صحیح فاصله‌ی $[-۲, ۲]$ تابع کم‌ترین مقدار را دارد:

$$\Rightarrow x \in \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$$

پس در ۵ نقطه تابع gof کم‌ترین مقدار را دارد.

۲۰. گزینه‌ی «۴»

نقطه‌ی تلاقی با محور xها یعنی جایی که عرض تابع صفر است. چون عرض روی $f^{-۱}$، طول روی f است پس:

$m = \dfrac{۱}{f'(۰)}$: شیب مماس بر $f^{-۱}$ در نقطه‌ی تلاقی با محور xها

$$f(x) = x^۲ - ۲x + ۲ \Rightarrow f'(x) = ۲x - ۲$$

$$\Rightarrow m = \frac{۱}{-۲} \Rightarrow \text{شیب قائم} = ۲$$