فصل یازدهم
انتگرال
پاسخ‌نامه تشریحی

اصلاحیه: پاسخ کلیدی سوال ۱۱ گزینه‌ی «۲» است.

۱. گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{n}-\frac{i^۲}{n^۳})=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(۱-(\frac{i}{n})^۲)$$

تغییر متغیر: $(\frac{i}{n})=x$

طبق درسنامه‌ی ۵ داریم:

$$\Rightarrow\int_۰^۱(۱-x^۲)dx=x-\frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۱=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۲. گزینه‌ی «۳»

$$\int_۰^\pi \sin^۳x\,dx=?$$

نکته:

$$\sin۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha\Rightarrow\sin^۳\alpha=\frac{۳}{۴}\sin\alpha-\frac{۱}{۴}\sin۳\alpha$$

$$\int_۰^\pi\sin^۳x\,dx=\frac{۳}{۴}\int_۰^\pi\sin x\,dx-\frac{۱}{۴}\int_۰^\pi\sin۳x\,dx$$

$$=\frac{۳}{۴}(-\cos x)\Big|_۰^\pi-\frac{۱}{۴}(\frac{-۱}{۳}\cos۳x)\Big|_۰^\pi=\frac{-۳}{۴}(-۱-۱)+\frac{۱}{۱۲}(-۱-۱)$$

$$=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۹-۱}{۶}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

۳. گزینه‌ی «۲»

ابتدا نقطه‌ی رأس (ماکزیمم) تابع را می‌یابیم: $f(x)=-x^۲+۴x$

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲\Rightarrow(۲,۴)\to\max$$

$$f(۲)=-۴+۸=۴$$

پس ناحیه‌ی بین خط $y=۴$ و منحنی f و در فاصله‌ی بین صفر تا ۲ هاشورخورده است.

$$\int_۰^۲ ۴-(-x^۲+۴x)dx=\int_۰^۲(x^۲-۴x+۴)dx$$

$$=\frac{x^۳}{۳}-\frac{۴x^۲}{۲}+۴x\Big|_۰^۲=\frac{۸}{۳}-۲(۴)+۸=\frac{۸}{۳}$$

۴. گزینه‌ی «۳»

$$\int_۱^۲\frac{x^۲-۱}{x^۲}dx=\int_۱^۲(۱-x^{-۲})dx=x-\frac{x^{-۱}}{-۱}\Big|_۱^۲=x+\frac{۱}{x}\Big|_۱^۲$$

$$=(۲+\frac{۱}{۲})-(۱+۱)=\frac{۱}{۲}$$

قضیه‌ی مقدار میانگین: $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\frac{\int_۱^۲\frac{x^۲-۱}{x^۲}dx}{۲-۱}=\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow\frac{c^۲-۱}{c^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow۲c^۲-۲=c^۲\Rightarrow c^۲=۲\Rightarrow c=\pm\sqrt{۲}$$

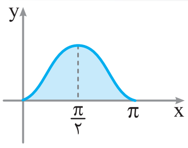
که فقط $c=\sqrt{۲}$ در بازه‌ی مورد نظر قرار دارد.

۵. گزینه‌ی «۳»

$$\int(\tan x+\cot x)^۲dx=\int(\tan^۲x+\cot^۲x+۲\underbrace{\tan x.\cot x}_{۱})dx$$

$$=\int(۱+\tan^۲x)dx+\int(۱+\cot^۲x)dx=\tan x-\cot x+c$$

۶. گزینه‌ی «۱»



$$\sin^۲x=\frac{۱-\cos۲x}{۲}$$

$$S=\int_۰^\pi\sin^۲x\,dx=\int_۰^\pi(\frac{۱-\cos۲x}{۲})dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^\pi(۱-\cos۲x)dx$$

$$=\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲}\sin۲x)\Big|_۰^\pi=\frac{۱}{۲}(\pi-\frac{۱}{۲}\cancelto{۰}{\sin۲\pi})=\frac{\pi}{۲}$$

۷. گزینه‌ی «۳»

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\frac{\int_۱^۳(۳x^۲-۲x)dx}{۳-۱}=\frac{x^۳-x^۲\Big|_۱^۳}{۲}$$

$$=\frac{(۲۷-۹)-\cancelto{۰}{(۱-۱)}}{۲}=۹$$

۸. گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases}f(x)=\int_۱^x\frac{dt}{\sqrt{t+۳}}\Rightarrow f'(x)=۱\times\frac{۱}{\sqrt{x+۳}}=\frac{۱}{\sqrt{x+۳}}\\ g(x)=\sqrt{۴-۳x}\Rightarrow g'(x)=\frac{-۳}{۲\sqrt{۴-۳x}}\end{cases}$$

چون معادله‌ی خط مماس بر منحنی g.f را می‌خواهیم، ابتدا از (g.f) در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق می‌گیریم.

$$(g.f)'=g'.f+f'.g$$

$$=\frac{-۳}{۲\sqrt{۴-۳x}}\times\int_۱^x\frac{dt}{\sqrt{t+۳}}+\frac{۱}{\sqrt{x+۳}}\times\sqrt{۴-۳x}$$

$$\xrightarrow{x=۱}\frac{-۳}{۲\times۱}\cancelto{۰}{\int_۱^۱\frac{dt}{\sqrt{t+۳}}}+\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۱}=\frac{۱}{۲}\to \text{شیب خط مماس}$$

$$(g.f)=\sqrt{۴-۳x}\times\int_۱^x\frac{dt}{\sqrt{t+۳}}\Rightarrow(g.f)(۱)=۱\times\cancelto{۰}{\int_۱^۱\frac{dt}{\sqrt{t+۳}}}=۰$$

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی (۱,۰):

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow۲y-x+۱=۰$$

۹. گزینه‌ی «۳»

$$\int_{-۱}^۱(x-[x])dx=\int_{-۱}^۰(x+۱)dx+\int_۰^۱x\,dx=(\frac{x^۲}{۲}+x)\Big|_{-۱}^۰+\frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^۱$$

$$=۰-(\frac{۱}{۲}-۱)+\frac{۱}{۲}=۱$$

۱۰. گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\int (x-\sqrt{x})^2 dx=\int (x^2+x-2x.x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2\times\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$$

$$f(1)-f(0)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}\Big]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{1}{30}$$

۱۱. گزینه‌ی «۲»

اصلاحیه: کلید به اشتباه ۴ خورده است.

چون $f(x)=x$ تابعی صعودی است، بنابراین:

$$U_n(f)-L_n(f)=\frac{a-0}{n}[f(a)-f(0)]=\frac{a}{n}[a-0]=\frac{a^2}{n}$$

۱۲. گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=\frac{1}{x^3-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(3x^2-1)}{(x^3-x)^2}\xrightarrow[\text{مخرج مثبت}]{x\in[3,4]}f'(x)<0$$

f نزولی است.

بنابراین طبق قضیه‌ی کرانداری:

$$\Rightarrow (4-3)f(4)\le\int_3^4\frac{dx}{x^3-x}\le(4-3)f(3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4^3-4}\le\int_3^4\frac{dx}{x^3-x}\le\frac{1}{3^3-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{60}\le\int_3^4\frac{dx}{x^3-x}\le\frac{1}{24}$$

۱۳. گزینه‌ی «۳»

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2x-\sin^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

۱۴. گزینه‌ی «۲»

$$f(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}$$

داریم که:

$$\begin{cases}1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\\ \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\end{cases}$$

$$f(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}dx=\int_0^{\alpha}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\,\underbrace{|\cos\frac{x}{2}|}_{+}}dx$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\sqrt{2}\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}}dx=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\alpha}\sin\frac{x}{2}dx$$

$$f(\alpha)=\sqrt{2}\int_0^{\alpha}\sin\frac{x}{2}dx=\sqrt{2}(-2\cos\frac{x}{2})\Big]_0^{\alpha}$$

$$=-2\sqrt{2}\Big[\cos\frac{\alpha}{2}-\underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1}\Big]=-2\sqrt{2}[\cos\frac{\alpha}{2}-1]$$

$$\lim_{\alpha\to\pi}f(\alpha)=\lim_{\alpha\to\pi}\left(-2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$$

۱۵. گزینه‌ی «۳»

$$\int_0^3\frac{dx}{x^2+9}=\int_0^3\frac{dx}{3^2+x^2}=\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\Big]_0^3=\frac{1}{3}\Big[\underbrace{\tan^{-1}1}_{\frac{\pi}{4}}-\underbrace{\tan^{-1}0}_{0}\Big]$$

$$=\frac{\pi}{12}$$

۱۶. گزینه‌ی «۱»

$$\int\frac{x-2}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,f(x)+c\Rightarrow f(x)=?$$

$$\frac{1}{2}\int(x-2)x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\times 2x^{\frac{1}{2}}\Big]+c$$

$$=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+c=\sqrt{x}\Big[\frac{1}{3}x-2\Big]+c$$

۱۷. گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{t+2}{t^3}dt$$

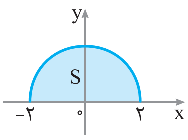
$$f'(x)=2x\frac{x^2+2}{(x^2)^3}=2x\frac{x^2+2}{x^6}=\frac{2x^2+4}{x^5}$$

۱۸. گزینه‌ی «۲»

معادله‌ی $y=\sqrt{4-x^2}$، معادله‌ی یک نیم‌دایره است، زیرا:

$$y=\sqrt{4-x^2}\xrightarrow{y\ge 0}y^2=4-x^2\Rightarrow y^2+x^2=4\ (y\ge 0)$$

مختصات مرکز این نیم‌دایره $(0,0)$ و شعاع آن ۲ است پس، نمودار آن به صورت مقابل است. در نتیجه انتگرال داده شده، برابر مساحت یک نیم‌دایره به شعاع ۲ است.



بنابراین: $S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi(2^2)=2\pi$

۱۹. گزینه‌ی «۲»

$$\sqrt{x}(dy+\frac{dx}{x^2})=dx$$

$$\Rightarrow dy+\frac{dx}{x^2}=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow dy=\frac{dx}{\sqrt{x}}-\frac{dx}{x^2}\Rightarrow dy=(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2})dx$$

حالا از طرفین انتگرال می‌گیریم:

$$\int dy=\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2})dx$$

$$\Rightarrow y=2x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}+c$$

$$\Rightarrow y=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+c$$

چون نمودار محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند بنابراین مختصات $(1,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند:

$$۰ = ۲(۱) + \frac{۱}{۱} + c \Rightarrow c = -۳$$

$$\Rightarrow y = f(x) = ۲\sqrt{x} + \frac{۱}{x} - ۳$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} - ۳ = ۱ + ۴ - ۳ = ۲$$

۲۰. گزینه‌ی «۱»

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{۲(۱-\cos ۲x)}} = \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x \, dx}{\underbrace{\sqrt{۲(۲\sin^۲ x)}}_{۲\underbrace{|\sin x|}_{+}}} = \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x \, dx}{۲\sin x}$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} \cot x \, dx = \frac{۱}{۲}\text{Ln}|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۲}\text{Ln}\underbrace{\left|\sin\frac{\pi}{۲}\right|}_{۱} - \frac{۱}{۲}\text{Ln}\underbrace{\left|\sin\frac{\pi}{۶}\right|}_{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\cancelto{۰}{\text{Ln}۱} - \text{Ln}\frac{۱}{۲}\right) = \frac{-۱}{۲}\text{Ln}۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}\text{Ln}۲ = \text{Ln}\sqrt{۲}$$