فصل دوم

دنباله‌های حسابی و هندسی

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه‌ی «۲»

$$a_1 = 4a_3 \Rightarrow a_1 = 4a_1q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{2}$$

چون دنباله نزولی است پس: $q=\frac{1}{2}$

حالا مجموع ۶ جمله‌ی اول را محاسبه می‌کنیم:

$$S_6 = \frac{a_1(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}a_1}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}a_1$$

۲. گزینه‌ی «۲»

دنباله‌ی داده شده، یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۲ و قدرنسبت $\sqrt{2}-1$ است، بنابراین:

$$S_\infty = \frac{2}{1-(1-\sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۳. گزینه‌ی «۴»

از جمله‌ی هفتم تا جمله‌ی هجدهم ۱۲ جمله وجود دارد.

$$S = \frac{12}{2}(a_7 + a_{18})$$

با توجه به جملات دنباله:

$$1,4,7,\ldots \xRightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی}} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_7 = a_1 + 6d = 1+18 = 19 \\ a_{18} = a_1 + 17d = 1+51 = 52 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 6(19+52) = 426$$

۴. گزینه‌ی «۳»

ارزش پول در پایان هر سال، یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $0/9P_0$ (ارزش پول سال اول) و قدرنسبت ۰/۹ تشکیل می‌دهد. پس برای محاسبه‌ی زمانی که ارزش پول ۰/۰۳ ارزش فعلی است، یعنی $0/03P_0$، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$0/03P_0 = 0/9P_0(0/9)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{30} = (0/9)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \log\frac{1}{30} = \log(0/9)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \log 30^{-1} = \log(\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow -\log 30 = (n-1)\log\frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow -(\log 3 + \log 10) = (n-1)(\log 9 - \log 10)$$

$$\xrightarrow{\log 3 = 0/475} -(0/475+1) = (n-1)(2\log 3 - 1)$$

$$\Rightarrow -(1/475) = (n-1)(2(0/475)-1)$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{-1/475}{-0/05} \Rightarrow n-1 = 29/5$$

$$\Rightarrow n = 30/5 \Rightarrow \min(n) = 31 \Rightarrow n \ge 31$$

جواب درست ۳۱ است. اما در گزینه‌ها نداریم. چون عدد صحیح بعدی ۳۲ است. گزینه‌ی «۳» را انتخاب می‌کنیم.

البته اشتباه طراح این بوده که جمله‌ی اول را P_0 در نظر گرفته که به طور قطع غلط است.

۵. گزینه‌ی «۳»

$$S_3 = 9d \Rightarrow \frac{3}{2}[2a_1 + 2d] = 9d$$

$$2a_1 + 2d = 6d \Rightarrow 4d = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 2d$$

حالا مجموع یازده جمله‌ی اول را می‌یابیم:

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2a_1 + 10d] = \frac{11}{2}[(2(2d) + 10d]$$

$$\Rightarrow S_{11} = \frac{11}{2}[14d] = 77d$$

۶. گزینه‌ی «۳»

$$8 = \frac{a + (2a+1)}{2} \Rightarrow 16 = 3a + 1 \Rightarrow a = 5$$

پس جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$5,8,11,\ldots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_{10} = 5 + (10-1)3 = 32$$

۷. گزینه‌ی «۱»

$$a_1a_5 = 324 \Rightarrow a_1(a_1q^4) = 324 \Rightarrow a_1^2q^4 = 324$$

$$a_2a_3 = 108 \Rightarrow (a_1q)(a_1q^2) = 108 \Rightarrow a_1^2q^3 = 108 \quad (*)$$

طرفین تساوی‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1^2q^4}{a_1^2q^3} = \frac{324}{108} \Rightarrow q = 3 \xrightarrow{(*)} a_1^2(3)^3 = 108$$

$$\Rightarrow a_1^2(27) = 108 \Rightarrow a_1^2 = 4 \Rightarrow a_1 = \pm 2$$

چون جملات دنباله مثبت هستند، پس: $a_1 = 2$

در نتیجه: $a_1 + q = 2 + 3 = 5$

۸. گزینه‌ی «۳»

فرض کنیم تعداد جملات برابر n باشد:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع جملات}}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$= \frac{5 + 111}{2} = 58$$

۹. گزینه‌ی «۳»

مجموع سه جمله‌ی اول $= a_1 + a_2 + a_3$

مجموع سه جمله‌ی آخر $= a_{15} + a_{14} + a_{13}$

چون مجموع سه جمله‌ی آخر ۱۰ برابر مجموع سه جمله‌ی اول است:

$$a_{15} + a_{14} + a_{13} = 10(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 39d = 10(3a_1 + 3d)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 39d = 30a_1 + 30d$$

$$\Rightarrow 27a_1 = 9d \Rightarrow d = 3a_1$$

جمله‌ی وسط دنباله یعنی جمله‌ی هشتم برابر ۲۲ است، پس:

$$a_1 + 7d = 22 \Rightarrow a_1 + 7(3a_1) = 22$$

$$\Rightarrow 22a_1 = 22 \Rightarrow a_1 = 1 \xrightarrow{d = 3a_1} d = 3$$

۱۰. گزینه‌ی «۴»

$$q = \frac{49-9}{9-1} = \frac{40}{8} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{a_9}{a_1} = 5 \Rightarrow \frac{a_1 + 8d}{a_1} = 5 \Rightarrow a_1 + 8d = 5a_1$$

$$\Rightarrow 4a_1 = 8d \Rightarrow a_1 = 2d$$

حالا نسبت جمله‌ی پانزدهم به جمله‌ی سوم را می‌یابیم:

$$\frac{a_{15}}{a_3} = \frac{a_1 + 14d}{a_1 + 2d} = \frac{2d + 14d}{2d + 2d} = \frac{16d}{4d} = 4$$

۱۱. گزینه‌ی «۲»

سه جمله را به صورت $a+d$ و a و $a-d$ در نظر می‌گیریم:

مجموع سه جمله $=۳a=۲۱\Rightarrow a=۷$

مجموع مکعب‌های سه جمله $=(a-d)^۳+a^۳+(a+d)^۳=۱۱۹۷$

$$\Rightarrow a^۳-۳a^۲d+۳ad^۲-d^۳+a^۳+a^۳+۳a^۲d+۳ad^۲+d^۳=۱۱۹۷$$

$$\Rightarrow ۳a^۳+۶ad^۲=۱۱۹۷\xrightarrow{a=۷}d^۲=۴\Rightarrow d=\pm۲$$

با فرض $d=۲$: جملات $۷-۲,۷,۷+۲$

که جمله‌ی بزرگ‌تر برابر ۹ است.

۱۲. گزینه‌ی «۲»

b و a و ۴ جملات متوالی دنباله‌ی هندسی‌اند:

$$a^۲=۴b\Rightarrow b=\frac{a^۲}{۴}\quad(*)$$

$b-۱$ و a و ۴ جملات متوالی دنباله‌ی عددی‌اند:

$$a=\frac{۴+b-۱}{۲}\Rightarrow ۲a=۳+b$$

$$\Rightarrow ۲a=۳+\frac{a^۲}{۴}\xrightarrow{\times۴}۸a=۱۲+a^۲$$

$$\Rightarrow a^۲-۸a+۱۲=۰\Rightarrow (a-۶)(a-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۶\xrightarrow{(*)}b=۹:\text{بیشترین مقدار } b\\ a=۲\xrightarrow{(*)}b=۱\end{cases}$$

۱۳. گزینه‌ی «۱»

طرز نمایش این سؤال کمی مشکل دارد. چون هم می‌توان آن را به صورت یک دنباله‌ی هندسی در نظر گرفت و هم به صورت یک دنباله‌ی عددی. به هر حال گویا مد نظر طراح دنباله‌ی هندسی بوده است:

$$۱-\sqrt{۲}+۲(۱-\sqrt{۲})+۴(۱-\sqrt{۲})+۸(۱-\sqrt{۲})+۱۶(۱-\sqrt{۲})$$
$$+۳۲(۱-\sqrt{۲})$$

$$=(۱-\sqrt{۲})(\underbrace{۱+۲+۴+...+۳۲}_{\text{۶ جمله با قدرنسبت ۲}})=(۱-\sqrt{۲})(\frac{۱(۱-(۲)^۶)}{۱-۲})$$

$$=۶۳-۶۳\sqrt{۲}$$

۱۴. گزینه‌ی «۲»

$$d=\frac{۵۵-۷}{۷+۱}=\frac{۴۸}{۸}=۶$$

$\Rightarrow$ جملات: $۷,۱۳,۱۹,۲۵,\underbrace{۳۱}_{\text{جمله‌ی وسط}},۳۷,۴۳,۴۹,۵۵$

۱۵. گزینه‌ی «۳»

$$a_۱=\frac{۳}{۴},a_n=۱۲\Rightarrow a_۱q^{n-۱}=۱۲\Rightarrow\frac{۳}{۴}q^{n-۱}=۱۲$$

$$\Rightarrow q^{n-۱}=۱۶\quad(*)$$

از طرفی:

$$S_n=\frac{۹۳}{۴}\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۹۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{a_۱=\frac{۳}{۴}}\frac{\frac{۳}{۴}(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۹۳}{۴}\Rightarrow\frac{۱-q^n}{۱-q}=۳۱\ (**)$$

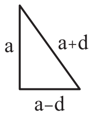
با توجه به تساوی $(*)$: $q^{n-۱}=۱۶\xrightarrow{\times q}q^n=۱۶q$

بنابراین در $(**)$: $\frac{۱-۱۶q}{۱-q}=۳۱\Rightarrow ۱-۱۶q=۳۱-۳۱q$

$$\Rightarrow ۱۵q=۳۰\Rightarrow q=۲$$

۱۶. گزینه‌ی «۲»

اضلاع مثلث را به صورت $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم:



$$\xrightarrow{\text{محیط}=۴۸}۳a=۴۸\Rightarrow a=۱۶$$

از طرفی طبق قضیه‌ی فیثاغورس:

$$a^۲+(a-d)^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+a^۲-۲ad+d^۲=a^۲+۲ad+d^۲$$

$$\Rightarrow a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d\xrightarrow{a=۱۶}d=۴$$

پس طول اضلاع قائم مثلث به صورت زیر است:

$$\begin{cases}a-d=۱۶-۴=۱۲\\ a=۱۶\end{cases}\Rightarrow S=\frac{۱۲\times۱۶}{۲}=۹۶$$

۱۷. گزینه‌ی «۲»

مجموع داده شده، مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a^۷$ و قدرنسبت $\frac{-a^۶b}{a^۷}=-\frac{b}{a}$ است. تعداد جملات هم که برابر ۸ تاست (چرا؟) بنابراین:

$$S_۸=\frac{a^۷(۱-(-\frac{b}{a})^۸)}{۱-(-\frac{b}{a})}=\frac{a^۷(۱-\frac{b^۸}{a^۸})}{۱+\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{a^۷(\frac{a^۸-b^۸}{a^۸})}{\frac{a+b}{a}}=\frac{a^۸(\frac{a^۸-b^۸}{a^۸})}{a+b}=\frac{a^۸-b^۸}{a+b}$$

۱۸. گزینه‌ی «۴»

$$S_۳=۷a_۲\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}=۷a_۱q$$

$$\Rightarrow\frac{۱-q^۳}{۱-q}=۷q\Rightarrow\frac{(۱-q)(۱+q+q^۲)}{۱-q}=۷q$$

$$\Rightarrow ۱+q+q^۲=۷q\Rightarrow q^۲-۶q+۱=۰\Rightarrow q=\frac{۶\pm\sqrt{۳۲}}{۲}=۳\pm۲\sqrt{۲}$$

چون دنباله نزولی است، پس: $q=۳-۲\sqrt{۲}$

حالا مجموع بی‌شمار جمله‌ی اول دنباله را می‌یابیم.

$$S_\infty=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{a_۱}{۱-(۳-۲\sqrt{۲})}=\frac{a_۱}{۲\sqrt{۲}-۲}\overset{\text{گویا}}{=\!=}\frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۴}a_۱$$

$$\Rightarrow S_\infty=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}+۱)a_۱$$

۱۹. گزینه‌ی «۳»

$$a_{۱۰}+۴a_۸=۶a_۹$$

$$\Rightarrow a_۱q^۹+۴a_۱q^۷=۶a_۱q^۸$$

$$\xrightarrow{\div(a_۱q^۷)}q^۲+۴=۶q\Rightarrow q^۲-۶q+۴=۰$$

$$\Rightarrow q=\frac{۶\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=۳\pm\sqrt{۵}$$

چون دنباله نزولی است، بنابراین: $q=۳-\sqrt{۵}$

۲۰. گزینه‌ی «۳»

$$S_n=n(۲n+۱)=۲n^۲+n\Rightarrow\begin{cases}d=۲A=۲(۲)=۴\\ a_۱=S_۱=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n=a_۱+(n-۱)d=۳+(n-۱)۴=۴n-۱$$