پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه‌ی «۲»

$$\log_x(x+6)=2+\log_x 2$$
$$\Rightarrow \log_x(x+6)-\log_x 2=2$$
$$\Rightarrow \log_x\frac{x+6}{2}=2 \Rightarrow \frac{x+6}{2}=x^2$$
$$\Rightarrow 2x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-2)(2x+3)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 & \checkmark \\ x=-\frac{3}{2} & \times \ \text{(در دامنه‌ی معادله قرار ندارد.)} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

۲. گزینه‌ی «۳»

$$\log 4=0/602 \Rightarrow \log 2^2=0/602 \Rightarrow 2\log 2=0/602$$
$$\Rightarrow \log 2=0/301 \quad (*)$$

حالا مقدار $\log 12/5$ را می‌یابیم:

$$\log 12/5=\log\frac{125}{10}=\log 125-\log 10=\log 5^3-1$$
$$=3\log 5-1=3(1-\log 2)-1$$
$$\overset{(*)}{=}3(1-0/301)-1=3(0/699)-1=1/097$$

۳. گزینه‌ی «۴»

با توجه به صورت سؤال، معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\log_3(7+x)=2+\log_3 7 \Rightarrow \log_3(7+x)-\log_3 7=2$$
$$\Rightarrow \log_3\frac{7+x}{7}=2 \Rightarrow \frac{7+x}{7}=9 \Rightarrow 7+x=63 \Rightarrow x=56$$

۴. گزینه‌ی «۲»

دامنه‌ی معادله، $x>1$ یا $x<-1$ است. پس داریم:

$$\log(x-1)^2=2\log|x-1|$$

پس معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\log(x^2-1)-\frac{1}{2}(2\log|x-1|)=2\log 3$$
$$\Rightarrow \log(x^2-1)-\log|x-1|=\log 3^2$$
$$\Rightarrow \log\frac{x^2-1}{|x-1|}=\log 9 \Rightarrow \frac{x^2-1}{|x-1|}=9$$

با توجه به دامنه، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} x>1: \frac{x^2-1}{x-1}=9 \Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=9 \Rightarrow x+1=9 \\ \Rightarrow x=8 \ \checkmark \\ x<-1: \frac{x^2-1}{-(x-1)}=9 \Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{-\cancel{(x-1)}}=9 \Rightarrow x+1=-9 \\ x=-10 \ \checkmark \end{cases}$$

۵. گزینه‌ی «۲»

ابتدا دقت کنید که دامنه‌ی نامعادله برابر $(-3,+\infty)$ است. از طرفی از آنجا که $\log 10=1$ بنابراین:

$$\text{نامعادله}: \log 10+\log\frac{x+3}{5}<0 \Rightarrow \log 10\left(\frac{x+3}{5}\right)<0$$
$$\Rightarrow \log(2x+6)<0 \Rightarrow 2x+6<1 \Rightarrow x<-\frac{5}{2}$$

بنابراین با توجه به دامنه‌ی نامعادله:

$$\text{مجموعه جواب}=\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$$

۶. گزینه‌ی «۲»

$$\log\frac{1}{a}=2/148 \Rightarrow \log a^{-1}=2/148$$
$$\Rightarrow -\log a=2/148 \Rightarrow \log a=-2/148$$
$$\Rightarrow a=10^{-2/148} \Rightarrow a^3=(10^{-2/148})^3=10^{-6/\ldots}$$

در عدد $0/1=10^{-1}$ بعد از ممیز صفری نداریم. در عدد $0/01=10^{-2}$ بعد از ممیز یک صفر و ... و در عدد 10^{-6} بعد از ممیز ۵ صفر وجود دارد، اما چون $10^{-6}>10^{-6/\ldots}$ است، بنابراین در عدد a^3 بعد از ممیز ۶ صفر قرار دارد.

۷. گزینه‌ی «۳»

$\log_3 2$ را به مبنای ۹ می‌بریم:
$$\log_3 2=\log_{3^2}2^2=\log_9 4$$

بنابراین معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\log_9 4+\log_9(x-4)=1 \Rightarrow \log_9 4(x-4)=1$$
$$\Rightarrow \log_9 4x-16=1 \Rightarrow 4x-16=9 \Rightarrow x=\frac{25}{4}=6/25$$

۸. گزینه‌ی «۴»

$$\log_a 8=-\frac{3}{4} \Rightarrow a^{-\frac{3}{4}}=8=2^3$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان } -\frac{4}{3}} (a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{3}}=(2^3)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow a=2^{-4} \Rightarrow a=\frac{1}{16}$$

حالا حاصل لگاریتم $\frac{2}{a}$ در پایه‌ی $\sqrt{2}$ را می‌یابیم:

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{2}{a}=\log_{\sqrt{2}}\frac{2}{\frac{1}{16}}=\log_{\sqrt{2}}32=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^5=\frac{5}{\frac{1}{2}}\log_2 2=10$$

۹. گزینه‌ی «۴»

$$\log(x^3+6x^2+12x+9)=\log(x+3)+1$$
$$\Rightarrow \log(x^3+6x^2+12x+9)-\log(x+3)=1$$
$$\Rightarrow \log\frac{x^3+6x^2+12x+9}{x+3}=1$$
$$\Rightarrow \frac{x^3+6x^2+12x+9}{x+3}=10 \Rightarrow \frac{(x+2)^3+1}{(x+2)+1}=10$$

حالا با فرض $x+2=t$:

$$\text{معادله}: \frac{t^3+1}{t+1}=10 \Rightarrow t^3+1=10t+10 \Rightarrow t^3-10t-9=0$$

یک جواب معادله‌ی بالا $t=-1$ است. حالا با تقسیم $t^3-10t-9$ بر $t+1$ داریم:

$$t^3-10t-9=0 \Rightarrow (t+1)(t^2-t-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-۱ \Rightarrow x+۲=-۱ \Rightarrow x=-۳ \quad \times \\ t^۲-t-۹=۰ \Rightarrow t=\frac{۱\pm\sqrt{۳۷}}{۲} \Rightarrow x+۲=\frac{۱\pm\sqrt{۳۷}}{۲} \\ \Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۳۷}}{۲} \xrightarrow[\text{لگاریتم‌ها}]{\text{با توجه به دامنه‌ی}} x=\frac{-۳+\sqrt{۳۷}}{۲} \end{cases}$$

۱۰. گزینه‌ی «۴»

$\log x+\log(x^۲-۳)=\log(x^۳-۳x)$

حالا از مقدار x استفاده می‌کنیم:

$$x=\underbrace{\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}}_{A}-\underbrace{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}}_{B}\Rightarrow x=A-B\Rightarrow x^۳=(A-B)^۳$$

$$\Rightarrow x^۳=A^۳-B^۳-۳A^۲B+۳AB^۲$$

$$\Rightarrow x^۳=A^۳-B^۳-۳AB(A-B)\quad(*)$$

$A-B$ که همان x است. حاصل‌ضرب $A.B$ هم با کمک اتحاد مزدوج برابر است با:

$$A.B=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}\times\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{۱-۲}=-۱$$

$$\xrightarrow{(*)} x^۳=A^۳-B^۳-۳(-۱)x\Rightarrow x^۳-۳x=A^۳-B^۳$$

$$\Rightarrow x^۳-۳x=(\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}})^۳-(\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}})^۳$$

$$\Rightarrow x^۳-۳x=۱+\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \log x^۳-۳x=\log ۲\sqrt{۲}=\log ۲^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\log ۲$$

۱۱. گزینه‌ی «۱»

$$\log_۴ ۲۷=\log_{۲^۲}۳^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲ ۳=\frac{۳}{۲}(۱/۵۷)=۲/۳۵۵$$

۱۲. گزینه‌ی «۴»

دو منحنی را تلاقی می‌دهیم:

$$(\frac{۱}{۲})^{۲x-۳}=۴^x\Rightarrow(۲^{-۱})^{۲x-۳}=(۲^۲)^x$$

$$\Rightarrow ۲^{-۲x+۳}=۲^{۲x}\Rightarrow -۲x+۳=۲x\Rightarrow ۴x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

با قرار دادن در یکی از توابع، عرض نقطه‌ی برخورد را هم می‌یابیم.

$$y=۴^x\xrightarrow{x=\frac{۳}{۴}}y=۴^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow y=(۲^۲)^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow y=۲^{\frac{۳}{۲}}$$

$\Rightarrow$ نقطه‌ی تلاقی: $A(\frac{۳}{۴},۲^{\frac{۳}{۲}})$

حالا فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی را از مبدا محاسبه می‌کنیم:

$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{(\frac{۳}{۴})^۲+(۲^{\frac{۳}{۲}})^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۲^۳}$$

$$=\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۸}=\sqrt{\frac{۹+۱۲۸}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۱۳۷}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۱۳۷}}{۴}$$

۱۳. گزینه‌ی «۱»

$$۲^{x-۱}-۲^{۵-x}=۳۱/۵\Rightarrow ۲^x\times۲^{-۱}-۲^۵\times۲^{-x}=۳۱/۵$$

$$\Rightarrow\frac{۲^x}{۲}-\frac{۳۲}{۲^x}=۳۱/۵\xrightarrow{۲^x=A}\frac{A}{۲}-\frac{۳۲}{A}=۳۱/۵$$

$$\xrightarrow{\times(۲A)}A^۲-۶۴=۶۳A\Rightarrow A^۲-۶۳A-۶۴=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=-۱\Rightarrow ۲^x=-۱ \quad \times\\ A=۶۴\Rightarrow ۲^x=۶۴\Rightarrow x=۶\end{cases}$$

بنابراین:

$$\log_۴(x+۲)=\log_۴(۶+۲)=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۱۴. گزینه‌ی «۳»

با توجه به معادله‌ی لگاریتمی، $y>۰$ است. هم‌چنین چون $y=x-۲$ پس قطعاً x مثبت است:

$$\Rightarrow\log_۴ x^۲+\log_۲ ۲y=۲\Rightarrow\log_{۲^۲}x^۲+\log_۲ ۲y=۲$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{۲}\log_۲ x+\log_۲ ۲y=۲$$

$$\Rightarrow\log_۲ x(۲y)=۲\Rightarrow ۲xy=۴\Rightarrow xy=۲\quad(*)$$

چون مقدار y را می‌خواهیم در تساوی $y=x-۲$، x را بر حسب y می‌یابیم: $x=y+۲$

$$\xrightarrow{(*)}(y+۲)(y)=۲\Rightarrow y^۲+۲y-۲=۰$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۳}$$

که با توجه به اینکه $y>۰$ است $y=-۱+\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

۱۵. گزینه‌ی «۳»

اول $\log_۲ x$ را به مبنای ۴ می‌بریم:

$$\log_۲ x=\log_{۲^۲}x^۲=\log_۴ x^۲$$

پس معادله‌ی لگاریتمی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\log_۴ x^۲+\log_۴ ۸y^{-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\log_۴ x^۲+\log_۴\frac{۸}{y}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\log_۴\frac{۸x^۲}{y}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۸x^۲}{y}=۴^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow\frac{۸x^۲}{y}=(۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{۸x^۲}{y}=۲^۳\Rightarrow x^۲=y$$

از طرفی با توجه به تساوی $y=x+۲$ داریم:

$$x^۲=x+۲\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱ \quad \times\\ x=۲\Rightarrow y=۴\Rightarrow x+y=۶\end{cases}$$

۱۶. گزینه‌ی «۱»

با توجه به ضابطه‌ی f، نسبت $\frac{f(۲x+۱)}{(f(x))^۲}$ را می‌یابیم:

$$\frac{f(۲x+۱)}{(f(x))^۲}=\frac{۲^{۲(۲x+۱)-۱}}{(۲^{۲x-۱})^۲}=\frac{۲^{۴x+۱}}{۲^{۴x-۲}}=۲^{(۴x+۱)-(۴x-۲)}=۲^۳=۸$$

۱۷. گزینه‌ی «۳»

$$(\frac{۱}{۲})^t=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می‌گیریم}}\log(\frac{۱}{۲})^t=\log(\frac{۱}{۵})$$

$$\Rightarrow t\log\frac{۱}{۲}=\log\frac{۱}{۵}\Rightarrow t\log ۲^{-۱}=\log ۵^{-۱}$$

$$\Rightarrow -t\log ۲=-\log ۵\Rightarrow t=\frac{\log ۵}{\log ۲}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱-\log ۲}{\log ۲}=\frac{۱-۰/۳۰۱}{۰/۳۰۱}\simeq\frac{۰/۶۹۹}{۰/۳۰۱}\simeq ۲/۳۲$$

۱۸. گزینه‌ی «۳»

$$\log ۳/۲=۰/۵۰۵\Rightarrow\log\frac{۳۲}{۱۰}=۰/۵۰۵$$

$$\Rightarrow\log ۳۲-\log ۱۰=۰/۵۰۵\Rightarrow\log ۲^۵-۱=۰/۵۰۵$$

$$\Rightarrow ۵\log ۲=۱/۵۰۵\Rightarrow\log ۲=۰/۳۰۱$$

حالا مقدار $\log ۶/۲۵$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log ۶/۲۵=\log\frac{۶۲۵}{۱۰۰}=\log ۶۲۵-\log ۱۰۰$$

$$\log ۵^{۴} - ۲ = ۴\log ۵ - ۲ = ۴(۱ - \log ۲) - ۲$$
$$= ۴(۱ - ۰/۳۰۱) - ۲ = ۰/۷۹۶$$

۱۹. گزینه‌ی «۲»

$$\log_{۲} ۱۲/۵ = ۳/۶۴ \Rightarrow \log_{۲} \frac{۲۵}{۲} = ۳/۶۴$$
$$\Rightarrow \log_{۲} ۲۵ - \log_{۲} ۲ = ۳/۶۴ \Rightarrow \log_{۲} ۵^{۲} - ۱ = ۳/۶۴$$
$$۲\log_{۲} ۵ = ۴/۶۴ \Rightarrow \log_{۲} ۵ = ۲/۳۲ \quad (*)$$

حالا حاصل $\log_{۴} ۱۰۰$ را می‌یابیم:

$$\log_{۴} ۱۰۰ = \log_{۴} ۲۵ \times ۴ = \log_{۴} ۲۵ + \log_{۴} ۴$$
$$= \log_{۴} ۲۵ + ۱ = \log_{۲^{۲}} ۵^{۲} + ۱ = \frac{۲}{۲}\log_{۲} ۵ + ۱$$
$$= \log_{۲}^{۵} + ۱ \overset{(*)}{=\!=} ۲/۳۲ + ۱ = ۳/۳۲$$

۲۰. گزینه‌ی «۱»

$$\log_{۱۶} ۸\sqrt[۳]{۴} = \log_{۲^{۴}} (۲^{۳})(۲^{\frac{۲}{۳}}) = \log_{۲^{۴}} ۲^{۳+\frac{۲}{۳}}$$
$$= \frac{۳ + \frac{۲}{۳}}{۴} = \frac{\frac{۹+۲}{۳}}{۴} = \frac{۱۱}{۱۲}$$