۱. گزینه‌ی «۴»

ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم. عکس مجموع ریشه‌ها برابر حاصل‌ضرب آن دو ریشه است یعنی:

$$\frac{1}{\alpha+\beta}=\alpha\beta \quad (*)$$

حالا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}x^2+mx+m=1\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+mx+m-1=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\beta=\dfrac{m-1}{\frac{1}{2}}=2m-2\\ \alpha+\beta=-\dfrac{m}{\frac{1}{2}}=-2m\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{1}{-2m}=2m-2\Rightarrow -4m^2+4m=1$$

$$\Rightarrow 4m^2-4m+1=0\Rightarrow(2m-1)^2=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

۲. گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی نامعادله، $x\ge 0$ است. چون مخرج کسر همواره مثبت است، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{1+3\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}}\ge\sqrt{x}\Rightarrow 1+3\sqrt{x}\ge 2\sqrt{x}+2x$$

$$\Rightarrow 2x-\sqrt{x}-1\le 0\xrightarrow{\sqrt{x}=t}2t^2-t-1\le 0$$

$$\Rightarrow(2t+1)(t-1)\le 0\Rightarrow -\frac{1}{2}\le t\le 1\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2}\le\sqrt{x}}_{\text{همواره برقرار}}\le 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\le 1\Rightarrow x\le 1\xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}}0\le x\le 1$$

۳. گزینه‌ی «۳»

دامنه‌ی نامعادله $x\le 0$ است:

$$x^2+2x>x\sqrt{-x}\Rightarrow x(x+2)>x\sqrt{-x}$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم (چون از علامت x مطلع هستیم اجازه‌ی این کار را داریم) چون $x\le 0$ است، جهت نامعادله عوض می‌شود.

$$x+2<\sqrt{-x}\Rightarrow x-\sqrt{-x}+2<0$$

با فرض $\sqrt{-x}=t$ داریم:

$$x=-t^2\Rightarrow \text{معادله}: -t^2-t+2<0$$

$$\Rightarrow t^2+t-2>0\Rightarrow(t-1)(t+2)>0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t<-2\Rightarrow\sqrt{-x}<-2 & \times\\ t>1\Rightarrow\sqrt{-x}>1\Rightarrow -x>1\Rightarrow x<-1\end{cases}$$

چون $x<-1$ در دامنه هم قرار دارد بنابراین جواب است.

۴. گزینه‌ی «۳»

برای حالت گفته شده باید یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد ($\frac{c}{a}<0$) هم‌چنین مجموع ریشه‌ها مثبت باشد ($(-\frac{b}{a})>0$) (به خاطر $\frac{c}{a}<0$ دیگه نیازی به بررسی شرط Δ نیست)

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{c}{a}<0\Rightarrow\dfrac{-1}{m^2}<0\Rightarrow\dfrac{1}{m^2}>0 \quad \text{همواره برقرار است}\\ \dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow\dfrac{4}{m^2}>0 \quad \text{همواره برقرار است}\end{cases}$$

پس به ازای هر مقدار m ($m\ne 0$) این اتفاق رخ می‌دهد.

۵. گزینه‌ی «۲»

برای اینکه معادله‌ی درجه چهار، فقط دو جواب داشته باشد باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد: (۱) معادله‌ی بعد از تغییر متغیر $x^2=t$، دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد ($\frac{c}{a}<0$) یا (۲) یک ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد $\Delta=0\,,\ -\frac{b}{a}>0$:

$$3t^2-5t+a^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}1)\ \dfrac{c}{a}<0\Rightarrow\dfrac{a^2-1}{3}<0\Rightarrow|a|<1\\ 2)\begin{cases}\Delta=0\Rightarrow 25-4(3)(a^2-1)=0\\ \dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow\dfrac{5}{3}>0 \quad \text{همواره برقرار است}\end{cases}\end{cases}$$

جواب حالت دوم در گزینه‌ها نیست. پس جواب همان $|a|<1$ یا $-1<a<1$ است.

۶. گزینه‌ی «۲»

با فرض $t=\frac{x}{x-1}$: $\quad |t+\frac{1}{t}|<1$

می‌دانیم $x+\frac{1}{x}\ge 2$ یا $x+\frac{1}{x}\le -2$. در نتیجه هیچ‌گاه نامعادله‌ی بالا برقرار نخواهد بود.

۷. گزینه‌ی «۳»

ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+3=0$ به راحتی قابل محاسبه است:

$$2x^2-5x+3=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-ax+9=0$ که مجذور ریشه‌های معادله‌ی بالاست به صورت زیر است:

$$\begin{cases}\alpha=1^2=1\\ \beta=(\frac{3}{2})^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-a}{4}\Rightarrow 1+\frac{9}{4}=\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{13}{4}=\frac{a}{4}\Rightarrow a=13$$

۸. گزینه‌ی «۳»

$$x-\sqrt{x-1}=13\Rightarrow x-13=\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow(x-13)^2=x-1\Rightarrow x^2-26x+169=x-1$$

$$\Rightarrow x^2-27x+170=0\Rightarrow(x-10)(x-17)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=10 \ \times \quad \text{(در معادله صدق نمی‌کند.)}\\ x=17\Rightarrow[\dfrac{x^2}{12}]=[\dfrac{289}{12}]=[24/...]=24\end{cases}$$

۹. گزینه‌ی «۴»

نمودار تابع پایین‌تر از خط $y=1$ باشد یعنی:

$$\frac{۲x^۲+x}{x^۲-x-۲}<۱ \Rightarrow \frac{۲x^۲+x}{x^۲-x-۲}-۱<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲+x-x^۲+x+۲}{x^۲-x-۲}<۰ \Rightarrow \frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲-x-۲}<۰$$

صورت یک عبارت همواره مثبت است. پس برای برقرار بودن نامساوی بالا کافیست:

$$x^۲-x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۲$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

$$۵x^۳+۷x^۲-x-۳=۰ \quad (a+c=b+d)$$

پس یک ریشه‌ی معادله حتماً (۱-) است. در نتیجه با تقسیم عبارت بر $x+۱$ ریشه‌های دیگر را می‌یابیم.

$$\begin{array}{l|l} ۵x^۳+۷x^۲-x-۳ & x+۱ \\ \cline{2-2} \underline{-(۵x^۳+۵x^۲)} & ۵x^۲+۲x-۳ \\ \quad ۲x^۲-x & \\ \quad \underline{-(۲x^۲+۲x)} & \\ \qquad -۳x-۳ & \\ \qquad \underline{-(-۳x-۳)} & \\ \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow ۵x^۳+۷x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow (x+۱)(۵x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ ۵x^۲+۲x-۳=۰ \xrightarrow{۵+(-۳)=۲} \begin{cases} x=-۱ \\ x=\frac{۳}{۵} \end{cases} \end{cases}$$

پس معادله یک ریشه‌ی مضاعف منفی و یک ریشه‌ی مثبت دارد.

۱۱. گزینه‌ی «۴»

$$\sqrt{۱۱+x}-\sqrt{۲x+۵}=۲ \Rightarrow \sqrt{۱۱+x}=۲+\sqrt{۲x+۵}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱۱+x=۴+۲x+۵+۴\sqrt{۲x+۵}$$

$$\Rightarrow ۲-x=۴\sqrt{۲x+۵} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (۲-x)^۲=۱۶(۲x+۵)$$

$$۴+x^۲-۴x=۳۲x+۸۰ \Rightarrow x^۲-۳۶x-۷۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۳۸)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳۸ & \times \text{(صدق نمی‌کند.)} \\ x=-۲ \end{cases}$$

۱۲. گزینه‌ی «۴»

$$\text{جمله‌ی } (k+۱)\text{ام} = \binom{۶}{k}(۲\sqrt{x})^{۶-k}(-\frac{۱}{x})^k$$

$$=\binom{۶}{k}۲^{۶-k}(x^{\frac{۱}{۲}})^{۶-k}(-۱)^k(x^{-۱})^k$$

$$=\binom{۶}{k}۲^{۶-k}(-۱)^k(x^{۳-\frac{k}{۲}})(x^{-k})$$

$$=\binom{۶}{k}۲^{۶-k}(-۱)^k(x^{۳-\frac{۳k}{۲}})$$

برای اینکه جمله فاقد x باشد باید: $۳-\frac{۳k}{۲}=۰ \Rightarrow k=۲$

پس با قرار دادن $k=۲$:

$$\text{جمله‌ی سوم} = \binom{۶}{۲}۲^{۶-۲}(-۱)^{۲}=۱۵\times(۱۶)=۲۴۰$$

۱۳. گزینه‌ی «۲»

$$۶-۴\sqrt{۲}=(۲-\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \sqrt[۶]{(۲-\sqrt{۲})^۲}\times\sqrt[۳]{۲+۲\sqrt{۲}}$$

$$=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۲}}\sqrt[۳]{۲+۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)}\sqrt[۳]{۲(\sqrt{۲}+۱)}$$

$$=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{۲^{\frac{۳}{۲}}}=۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

۱۴. گزینه‌ی «۴»

رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$۴x^{۲۱}-۳x^{۱۲}+۲x^۲+x=(x^۳-x)Q(x)+R(x)$$

در تساوی بالا برای حذف $Q(x)$ از تساوی $x^۳=x$ استفاده می‌کنیم:

$$۴(x^۳)^۷-۳(x^۳)^۴+۲x^۲+x=(x^۳-x)Q(x)+R(x)$$

$$\Rightarrow ۴(x)^۷-۳x^۴+۲x^۲+x=۰+R(x)$$

$$\Rightarrow ۴(x^۳)^۲x-۳x^۳(x)+۲x^۲+x=R(x)$$

$$\Rightarrow ۴x^۲(x)-۳x(x)+۲x^۲+x=R(x)$$

$$\Rightarrow R(x)=۴x^۳-۳x^۲+۲x^۲+x$$

$$\Rightarrow R(x)=۴x-x^۲+x=-x^۲+۵x$$

$$\Rightarrow R(۲)=-۴+۱۰=۶$$

۱۵. گزینه‌ی «۱»

$$\underbrace{۳x-۵<}_{\substack{\text{بالای خط} \\ y=۳x-۵}}x^۲-۳x\underbrace{<۰}_{\substack{\text{زیر محور} \\ x\text{ها}}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{۳x-۵<\overbrace{x^۲-۳x}^{(۲)}}_{(۱)}<۰ \Rightarrow \begin{cases} (۱)\ x^۲-۳x>۳x-۵ \\ (۲)\ x^۲-۳x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲-۶x+۵>۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵)>۰ \Rightarrow x>۵ \text{ یا } x<۱ \\ x(x-۳)<۰ \Rightarrow ۰<x<۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰<x<۱$$

۱۶. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{(x-[x])\sqrt{x+۱}}{x^۲-x-۶}<۰$$

عبارت صورت با شرط $x>-۱$ و $x\notin\mathbb{Z}$ همواره مثبت است. (چون رادیکال با فرجه‌ی زوج داریم و هم‌چنین $۰\le x-[x]<۱$ و با شرط $x\notin\mathbb{Z}$، $۰<x-[x]<۱$) پس با این شرایط باید مخرج منفی باشد.

$$x^۲-x-۶<۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)<۰ \Rightarrow -۲<x<۳$$

اما چون x نمی‌تواند عدد صحیح باشد (چون صورت صفر می‌شه) و $x>-۱$ است بنابراین:

$$-۱<x<۳,\ x\ne ۰,۱,۲ \Rightarrow x\in(-۱,۳)-\{۰,۱,۲\}$$

۱۷. گزینه‌ی «۱»

$$x^۳+(x^۲-x)(x+۱-m)=۰$$

$$\Rightarrow x^۳+x^۳+\cancel{x^۲}-mx^۲-\cancel{x^۲}-x+mx=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۳-mx^۲-(۱-m)x=۰$$

$$\Rightarrow x[۲x^۲-mx-(۱-m)]=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{یک ریشه‌ی حقیقی} \\ ۲x^۲ - mx - (۱-m) = ۰ \end{cases}$$

در صورت سؤال گفته شده مجموع مجذورات ریشه‌های حقیقی معادله برابر ۴ است، وقتی یکی از ریشه‌ها صفر است، تاثیری در مجموع مجذورات ریشه‌ها ندارد پس ریشه‌های دیگر را از معادله‌ی دوم به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{m}{۲} \\ \alpha.\beta = \frac{-(۱-m)}{۲} \end{cases}$$

$$(\alpha+\beta)^۲ = \frac{m^۲}{۴} \Rightarrow \underbrace{\alpha^۲+\beta^۲}_{۴} + \underbrace{۲\alpha\beta}_{-(۱-m)} = \frac{m^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴-(۱-m) = \frac{m^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳+m = \frac{m^۲}{۴} \Rightarrow m^۲ - ۴m - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (m-۶)(m+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۶ & (\Delta \text{ معادله منفی می‌شود.)(غ ق ق}) \\ m = -۲ & \checkmark \end{cases}$$

۱۸. گزینه‌ی «۲»

با توجه به مثبت بودن ضریب $x^۲$ (تابع می‌نیمم دارد) برای اینکه نمودار از ناحیه‌ی سوم عبور نکند باید:

$$\begin{cases} \text{محور تقارن} \geq ۰ \Rightarrow -\frac{۳m-۱}{۲(۲)} \geq ۰ \Rightarrow ۳m-۱ \leq ۰ \Rightarrow m \leq \frac{۱}{۳} \\ \text{عرض از مبدا} \geq ۰ \Rightarrow m^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow m \geq ۱ \text{ یا } m \leq -۱ \end{cases}$$

از اشتراک دو جواب به دست آمده، خواهیم داشت: $m \leq -۱$

۱۹. گزینه‌ی «۲»

مخرج یک عبارت همواره مثبت است، بنابراین طرفین وسطین می‌کنیم:

$$x^۲ - ۳x < x^۲ - ۲|x| + ۳$$

$$\Rightarrow ۲|x| - ۳x - ۳ < ۰$$

$$\begin{cases} x \geq ۰: ۲x - ۳x - ۳ < ۰ \Rightarrow x > -۳ \xrightarrow{x \geq ۰} x \geq ۰ \\ \text{یا} \\ x < ۰: -۲x - ۳x - ۳ < ۰ \Rightarrow ۵x > -۳ \Rightarrow x > -\frac{۳}{۵} \\ \xrightarrow{x<۰} -\frac{۳}{۵} < x < ۰ \end{cases}$$

از اجتماع جواب‌های به دست آمده:

$$\text{مجموعه جواب}: x > -\frac{۳}{۵}$$

۲۰. گزینه‌ی «۲»

معادله‌های دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$۴x^۴ - ۳x^۲ - ۱ = -x^۳ + x$$

$$(۴x^۲+۱)(x^۲-۱) = -x(x^۲-۱)$$

عبارت $x^۲ - ۱$ در هر دو طرف معادله یکسان است. با در نظر گرفتن ریشه‌هایش، طرفین را بر $x^۲ - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x^۲-۱ \neq ۰} ۴x^۲ + ۱ = -x \Rightarrow ۴x^۲ + x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه ندارد.}$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از:

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$