پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه‌ی «۱»

با توجه به اینکه محدوده‌ی برد تابع $y=x+\frac{1}{x}$ به صورت $\mathbb{R}-(-2,2)$ است، بنابراین دامنه‌ی f برابر $\mathbb{R}-(-2,2)$ است.

۲. گزینه‌ی «۱»

تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2^x)=2^x+\frac{1}{2^x}=2^x+2^{-x}$$

حالا $(fog)(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$f(g(-x))=2^{-x}+2^x=f(g(x))\Rightarrow$ fog زوج است.

۳. گزینه‌ی «۴»

با توجه به صورت سؤال، حاصل $(fof)(g(x))$ را می‌خواهیم. داریم که:

$$fof(g(x))=f(\underbrace{f(g(x))}_{(*)})$$

پس ابتدا مقدار $f(g(x))$ را می‌یابیم و سپس حاصل را در تابع f جایگزاری می‌کنیم. به این صورت:

عبارت $(*)$: $f(g(x))=(2\cos x)^2-2=4\cos^2 x-2=2\cos 2x$

$$f(f(g(x)))=f(2\cos 2x)=(2\cos 2x)^2-2=4\cos^2 2x-2$$
$$=2\cos 4x$$

حالا مقدار $x=\frac{\pi}{12}$ را در عبارت بالا جایگزاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}}2\cos 4\frac{\pi}{12}=2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$$

نکته: $1+\cos 2x=2\cos^2 x$

۴. گزینه‌ی «۱»

اول ریشه‌های $f(x)=0$ را می‌یابیم و سپس به جای xهای ریشه‌ها $g(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$2x^2-x-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow 5+2x=1\Rightarrow x=-2\\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 5+2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{11}{4}\end{cases}$$

۵. گزینه‌ی «۲»

$$f(g(x))=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

با گویا کردن کسر $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ حاصل را می‌یابیم:

$$f(g(x))=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)}\right)$$

$$\Rightarrow f(g(x))=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}(2x)=x$$

۶. گزینه‌ی «۱»

$$f(x)=\sqrt{|x|-[x]}:|x|-[x]\geq 0$$

اگر $x\geq 0$ که نامعادله برقرار است، چون:

نامعادله: $|x|-[x]\geq 0\Rightarrow x-[x]\geq 0$

می‌دانیم که همواره $0\leq x-[x]<1$. پس نامعادله‌ی بالا همواره برقرار است. اگر $x<0$ هم باشد که نامعادله برقرار است. چون

$$\underbrace{|x|\underbrace{-\underbrace{[x]}_{\text{منفی}}}_{\text{مثبت}}}_{\text{مثبت}}\Rightarrow |x|-[x]>0$$

پس دامنه‌ی تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۷. گزینه‌ی «۱»

$$f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2+2\Rightarrow f(t)=t^2+2$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+2=x+2$$

۸. گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=3x^2-3\Rightarrow f(g(x))=3g^2(x)-3$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(g(x))=3(x^2-2x)$ داریم:

$$3(x^2-2x)=3g^2(x)-3$$

حالا برای محاسبه‌ی $g(5)$ به جای xها ۵ قرار می‌دهیم:

$$3(5^2-2(5))=3g^2(5)-3\Rightarrow 48=3g^2(5)$$

$$\Rightarrow g^2(5)=16\Rightarrow g(5)=\pm 4$$

۹. گزینه‌ی «۱»

چون $(a+4,a)\in f^{-1}$ بنابراین: $(a,a+4)\in f\Rightarrow f(a)=a+4$

پس $x=a$ را در تابع f قرار می‌دهیم:

$$f(a)=\frac{1-2a}{3a+4}\Rightarrow a+4=\frac{1-2a}{3a+4}$$

$$\Rightarrow 3a^2+4a+12a+16=1-2a$$

$$\Rightarrow 3a^2+18a+15=0\Rightarrow a^2+6a+5=0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a+5)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ a=-5\end{cases}$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

چون f صعودی اکید است $(f'>0)$، پس یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. چون ترکیب دو تابع f و g برابر x شده پس g معکوس f است. حالا برای محاسبه‌ی $g(-5)$ یا همان $f^{-1}(-5)$ (۵-، طول روی f^{-1} و عرض روی f است) کافیست معادله‌ی $f(x)=-5$ را حل کنیم:

$$x^3+4x=-5\Rightarrow x=-1\Rightarrow g(-5)=-1$$

۱۱. گزینه‌ی «۲»

$(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$

پس ابتدا تابع gof را تشکیل می‌دهیم و سپس معکوس آن را محاسبه می‌کنیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{2x-3}{1-x})$$

$$=1+\frac{1}{\frac{2x-3}{1-x}+2}=1+\frac{1}{\frac{2x-3+2-2x}{1-x}}=1+\frac{1}{\frac{-1}{1-x}}$$

$$=1+x-1=x\Rightarrow (gof)(x)=x\Rightarrow (gof)^{-1}(x)=x$$

۱۲. گزینه‌ی «۲»

چون f صعودی و گذرا بر مبدأ مختصات است، می‌توانیم به جای آن $f(x)=x$ قرار دهیم. (چون این تابع ویژگی‌های مورد نظر را دارا است.)

بنابراین:
$$g(x)=\sqrt{xf(x)}=\sqrt{x(x)}=\sqrt{x^2}$$
که دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است.

۱۳. گزینه‌ی «۱»

از دامنه‌ی f استفاده می‌کنیم و تشکیل شدن یا نشدن f را بررسی می‌کنیم:

$f(f(2))=f(1)$ تشکیل نمی‌شود:

$f(f(3))=f(5)=9\Rightarrow (3,9)\in fof$

$f(f(7))=f(2)=1\Rightarrow (7,1)\in fof$

$f(f(5))=f(9)$: تشکیل نمی‌شود

$f(f(4))=f(3)=5\Rightarrow (4,5)\in fof$

پس برد fof شامل سه عضو $\{1,5,9\}$ است.

۱۴. گزینه‌ی «۱»

تابع gof را تشکیل می‌دهیم. فقط قبل از هر چیز دامنه را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

با توجه به دامنه‌های f و g:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R},\underbrace{(\sqrt{2})^x>0}_{\text{همواره برقرار}}\}=\mathbb{R}$$

حالا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=g((\sqrt{2})^x)=\log_4^{(\sqrt{2})^x}=x\log_4^{\sqrt{2}}=x\log_{2^2}^{2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=x(\frac{\frac{1}{2}}{2})=\frac{x}{4}$$

که این تابع، یک تابع صعودی است.

۱۵. گزینه‌ی «۳»

باید یک کاری کنیم که f هم تابع بشه و هم یک‌به‌یک.

$(4,2),(4,5)\in f$

پس باید یکی از این دو حذف بشه. چون $(3,2)\in f$ است پس بهتره که $\underline{\underline{(4,2)}}$ رو حذف کنیم که کمکی به یک‌به‌یک بودن تابع هم بشه. از طرفی:
$(3,2),(3,4)\in f$

باید یکی از این دو هم حذف بشه که چون $(1,2)\in f$ است، بهتره است $\underline{\underline{(3,2)}}$ حذف بشه. با این حذفی‌ها:

$$f=\{\underline{(5,2)},(4,5),\underline{(1,2)},(3,4),(2,3)\}$$

دو تا زوج مرتب با مولفه‌های دوم برابر هم داریم که باید یکشیون حذف بشه، پس در کل باید سه زوج مرتب را حذف کنیم.

۱۶. گزینه‌ی «۱»

$$y=x+\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow y-x=\sqrt{2x-x^2}$$

$$\Rightarrow (y-x)^2=2x-x^2\Rightarrow y^2+x^2-2xy=2x-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-(2y+2)x+y^2=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+2\pm\sqrt{(2y+2)^2-4(2)y^2}}{2(2)}$$

پس با توجه به وجود رادیکال باید:

$$(2y+2)^2-4(2)y^2\ge 0\Rightarrow 4y^2+8y+4-8y^2\ge 0$$

$$\Rightarrow -4y^2+8y+4\ge 0\Rightarrow y^2-2y-1\le 0$$

ریشه‌های معادله‌ی $y^2-2y-1=0$ به صورت $y=1+\sqrt{2}$ و $y=1-\sqrt{2}$ است در نتیجه: $1-\sqrt{2}\le y\le 1+\sqrt{2}$

از طرفی چون در محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع داریم که:

$$-x^2+2x\ge 0\Rightarrow x^2-2x\le 0\Rightarrow x(x-2)\le 0\Rightarrow 0\le x\le 2$$

چون x مثبت است در نتیجه y هم مقداری مثبت خواهد داشت پس $[0,1+\sqrt{2}]=$ برد

۱۷. گزینه‌ی «۴»

$$g(f(x))=g([x]-x)=[x]-x+|\underbrace{[x]-x+1}_{\text{مثبت}}|$$

$$=[x]-x+[x]-x+1=2([x]-x)+1$$

با توجه به نمودار $y=x-[x]$ و غیر یک‌به‌یک بودن آن، تابع gof معکوس‌ناپذیر است.

۱۸. گزینه‌ی «۲»

تابع f فرد است چون:

$$f(-x)=\log\frac{1+x}{1-x}=\log(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\log(\frac{1-x}{1+x})=-f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

پس معکوس آن، یعنی f^{-1} نیز تابعی فرد است.

۱۹. گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)-1}{g(x)+1}$$

با توجه به ضابطه‌ی $(fog)(x)$ داریم:

$$\frac{x^2+1}{x^2+2}=\frac{g(x)-1}{g(x)+1}\xrightarrow{x\to\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{x})^2+1}{(\sqrt{x})^2+2}=\frac{g(\sqrt{x})-1}{g(\sqrt{x})+1}$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{x+2}=\frac{g(\sqrt{x})-1}{g(\sqrt{x})+1}\Rightarrow (x+1)g(\sqrt{x})+x+1$$

$$=(x+2)g(\sqrt{x})-x-2\Rightarrow g(\sqrt{x})=2x+3$$

۲۰. گزینه‌ی «۱»

$$f(g(x))=\sqrt{2x-1}\Rightarrow f(\frac{x-1}{x})=\sqrt{2x-1}$$

$$\Rightarrow f(1-\frac{1}{x})=\sqrt{2x-1}$$

با فرض $t=1-\frac{1}{x}$ داریم: $1-\frac{1}{x}=t\Rightarrow 1-t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{1-t}$

در نتیجه: $f(t)=\sqrt{2(\frac{1}{1-t})-1}\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{2}{1-t}-1}$

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{2-1+t}{1-t}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$