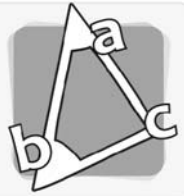


پاسخ نامه تشریحی

فصل ششم

مثلثات



۶. گزینه‌ی «۲»

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 &\Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} \sin x + \cos x = 1 \\ \Rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin x + \cos x = 1 &\Rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos x \cos \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = 1 \\ \Rightarrow \frac{\cos(x - \frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}} = 1 &\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} &\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

۷. گزینه‌ی «۲»

$$\begin{aligned} \tan(x + \alpha) \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = 1 &\Rightarrow \tan(x + \alpha) \cot x = 1 \\ \Rightarrow \tan(x + \alpha) = \frac{1}{\cot x} &\Rightarrow \tan(x + \alpha) = \tan x \\ \Rightarrow x + \alpha = k\pi + x &\Rightarrow \alpha = k\pi \\ \Rightarrow \sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sin(2k\pi - \frac{\pi}{6}) &= \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

البته این سوال کمی ایراد داره! به نظر شما ایرادش چیه؟!
۸. گزینه‌ی «۲»

$$\begin{aligned} \tan x \tan(\pi + x) + \cos^2 x (1 + \tan^2 x) \\ = \tan x \cdot \tan x + (\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x})(1 + \tan^2 x) \\ = \tan^2 x + 1 - \tan^2 x = 1 \end{aligned}$$

۹. گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} \cos C = \frac{CH}{b} \Rightarrow CH = b \cos C \\ \cos B = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cos B \end{cases}$$

حالا طرفین تساوی‌های بالا را با هم جمع می‌کنیم:
 $b \cos C + c \cos B = CH + BH = BC = a$

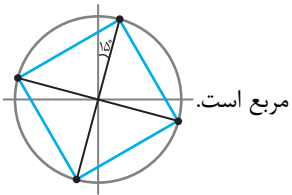
۱۰. گزینه‌ی «۴»

اصلاحیه: کلید به اشتباه ۲ خورده است.

$$\begin{aligned} \cos^2 x = \cos x + \sin x &\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x \\ \Rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) &= \cos x + \sin x \\ \frac{\cos x + \sin x = 0}{\cos x - \sin x = 1} &\xrightarrow{\times(-1)} \sin x - \cos x = -1 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = -1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \\ \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \end{cases} \end{aligned}$$

۱. گزینه‌ی «۲»

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3} &\Rightarrow \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2\sqrt{3} \\ \Rightarrow -\cot 2x = \sqrt{3} &\Rightarrow \cot 2x = -\sqrt{3} \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} &\Rightarrow \text{مربع است.} \end{aligned}$$



۲. گزینه‌ی «۱»

$$\begin{aligned} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + (x + \frac{\pi}{4})) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} &\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

۳. گزینه‌ی «۱»

$$\begin{aligned} \tan(\frac{\Delta\pi}{4} - \tan^{-1} \frac{3}{2}) &= \frac{\tan \frac{\Delta\pi}{4} - \tan(\tan^{-1} \frac{3}{2})}{1 + \tan \frac{\Delta\pi}{4} \tan(\tan^{-1} \frac{3}{2})} \\ &= \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + (1)(\frac{3}{2})} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

۴. گزینه‌ی «۳»

شکلی از مسئله رسم می‌کنیم.
با توجه به شکل و با کمک قضیه‌ی فیثاغورس:
 $AB^2 = 13 - 4 = 9 \Rightarrow AB = 3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cot(C - B) &= \frac{1}{\tan(C - B)} = \frac{1}{\frac{\tan C - \tan B}{1 + \tan C \tan B}} \\ &= \frac{1 + \tan C \tan B}{\tan C - \tan B} \xrightarrow{\text{با توجه به مثلث}} \frac{1 + (\frac{3}{2})(\frac{2}{3})}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{\frac{9-4}{6}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \end{aligned}$$

۵. گزینه‌ی «۵»

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} &\Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos 3x \leq 1 &\Rightarrow 1 < 2 \cos 3x \leq 2 \\ \Rightarrow 2 < 2 \cos 3x + 1 \leq 3 \end{aligned}$$

$$T = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

پس با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های «۲» و «۴» رد می‌شوند، چون دوره‌ی تناوب تابع‌های آن‌ها برابر 2π است. هم‌چنین چون نمودار، بلافاصله بعد از محور y ‌ها، روند نزولی دارد بنابراین باید ضریب \sin (با توجه به گزینه‌های «۱» و «۳») منفی باشد. در نتیجه:

$$y = 1 - \sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

۱۶. گزینه‌ی «۳»

کوچک‌ترین زاویه (α) ، روبه‌روی کوچک‌ترین ضلع قرار دارد. بنابراین با کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$(\Delta)^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9)\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\Delta}{6}$$

۱۷. گزینه‌ی «۴»

$$\sin(2\cos^{-1}x) = 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{گفتیم:}$$

$$\sin(2\cos^{-1}(\frac{3}{5})) = 2(\frac{3}{5})\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} \quad \text{بنابراین}$$

$$= 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$$

۱۸. گزینه‌ی «۱»

اصلاحیه: کلید به اشتباه ۴ خورده است.

$$\frac{\sin 11^\circ - \cos 7^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin(9^\circ + 2^\circ) - \cos(9^\circ - 2^\circ)}{\cos(18^\circ + 2^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ} = -1 + \tan 2^\circ$$

۱۹. گزینه‌ی «۴»

اصلاحیه: کلید به اشتباه ۳ خورده است.

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4 \tan x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{4 \tan x}{1 + \tan^2 x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(2 \tan x)}{1 + \tan^2 x} = 1 \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{با توجه به رابطه‌ی}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

۲۰. گزینه‌ی «۴»

از طرفین تساوی تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\tan^{-1} 2x - \cot^{-1} x) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\tan^{-1} 2x) - \tan(\cot^{-1} x)}{1 + \tan(\tan^{-1} 2x)\tan(\cot^{-1} x)} = 1$$

$$= \frac{2x - \frac{1}{x}}{1 + (2x)(\frac{1}{x})} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 - 1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 1}{x} = 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\tan(\cot^{-1} x) = \frac{1}{\cot(\cot^{-1} x)} = \frac{1}{x} \quad \text{دقت کنید که:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \\ \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x \in [0, 2\pi]}{x = 0, 2\pi} \\ \frac{x \in [0, 2\pi]}{x = \frac{5\pi}{4}} \\ x \in [0, 2\pi]: x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله پنج جواب دارد.

۱۱. گزینه‌ی «۱»

$$|\frac{1}{x-2}| \leq |1-x^2| \Rightarrow |x-2| \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3 \\ \text{یا} \\ x-2 \leq -1 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}, x \neq 2$$

بنابراین دامنه‌ی تابع به صورت $\mathbb{R} - (1, 3)$ است.

۱۲. گزینه‌ی «۱»

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{6})$$

$$= -\sin x + \cos(\frac{\pi}{4} - (x + \frac{\pi}{4})) - \cos(x + \frac{\pi}{6})$$

$$= -\sin x + \cos(\frac{\pi}{6} - x) - \cos(x + \frac{\pi}{6})$$

حالا از رابطه‌ی تبدیل جمع به ضرب کمک می‌گیریم:

$$= -\sin x + (-2(\sin \frac{\pi}{6} \sin(-x))) = -\sin x - 2(\frac{1}{2}(-\sin x))$$

$$= -\sin x + \sin x = 0$$

۱۳. گزینه‌ی «۱»

$$1 - \sin^2 10^\circ - \sin^2 70^\circ = \cos^2 10^\circ - \sin^2 70^\circ$$

$$= \cos^2 10^\circ - \cos^2 20^\circ = \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1 + \cos 40^\circ}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ) = \frac{1}{2}(-2(\sin 30^\circ \sin(-10^\circ))) = \frac{1}{2} \sin 10^\circ$$

۱۴. گزینه‌ی «۲»

$$\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2(1 - \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2(\sin x - \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(-\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})) = 2(-\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}))^2$$

$$\text{با فرض } \cos(x + \frac{\pi}{4}) = t$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } -2t = 4t^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

توجه کنید که:

۱۵. گزینه‌ی «۳»

اولاً چون شکل در فاصله‌ی $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ رسم شده و در این فاصله

یکبار کامل رسم شده، بنابراین دوره‌ی تناوب تابع برابر است با: