فصل هشتم

دنباله

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه‌ی «۲»

بررسی گزینه‌ی «۲»:

$$\text{یکنوا} \Rightarrow \text{نزولی } \frac{۱}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{صعودی: } \sqrt{n}$$

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{\infty}=۰\Rightarrow \text{همگرا} \Rightarrow \text{کراندار}$$

۲. گزینه‌ی «۱»

گفتیم اگر a_n واگرا و b_n همگرا باشد، قطعاً دنباله‌ی $\{a_n+b_n\}$ واگرا خواهد بود.

۳. گزینه‌ی «۳»

چون حد دنباله برابر ۲ است، بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۱/۹<\frac{۲n+۱}{n+۳}<۲/۱\Rightarrow -۰/۱<\frac{۲n+۱}{n+۳}-۲<۰/۱$$
$$\Rightarrow -۰/۱<\frac{۲n+۱-۲n-۶}{n+۳}<۰/۱\Rightarrow -۰/۱<\frac{-۵}{n+۳}<۰/۱$$
$$\Rightarrow \left|\frac{-۵}{n+۳}\right|<۰/۱\Rightarrow \frac{۵}{n+۳}<۰/۱\Rightarrow n+۳>۵۰$$
$$\Rightarrow n>۴۷\Rightarrow Min(n)=۴۸$$

۴. گزینه‌ی «۲»

در حقیقت طراح از ما مقدار کوچک‌ترین کران بالا را می‌خواهد. چون در تابع معادل دنباله، مشتق به ازای $x>۱$ مثبت است، بنابراین تابع و در نتیجه دنباله صعودی است. پس کوچک‌ترین کران بالای دنباله همان مقدار حد دنباله است:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۲+۵}{n^۲+۳}=۲$$

۵. گزینه‌ی «۱»

$$\frac{n+(-۱)^n}{n-۲}=\begin{cases}\frac{n+۱}{n-۲}\ , & n \text{ زوج}\\[4pt] \frac{n-۱}{n-۲}\ , & n \text{ فرد}\end{cases}$$

چون جملات در بازه‌ی $[۰/۹\,,۱/۱]$ قرار دارند پس $\varepsilon=۰/۱$ است. هم‌چنین مقدار حد دنباله هم برابر یک است. در نتیجه:

$$\text{زوج } n:\left|\frac{n+۱}{n-۲}-۱\right|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\left|\frac{n+۱-n+۲}{n-۲}\right|<\frac{۱}{۱۰}$$
$$\Rightarrow\left|\frac{۳}{n-۲}\right|<\frac{۱}{۱۰}\xrightarrow{\text{به ازای } n>۲}\frac{۳}{n-۲}<\frac{۱}{۱۰}$$
$$\Rightarrow n-۲>۳۰\Rightarrow n>۳۲\xrightarrow{\text{زوج } n}n\geq ۳۴$$
$$\text{فرد } n:\left|\frac{n-۱}{n-۲}-۱\right|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\left|\frac{n-۱-n+۲}{n-۲}\right|<\frac{۱}{۱۰}$$
$$\Rightarrow\left|\frac{۱}{n-۲}\right|<\frac{۱}{۱۰}\xrightarrow{n>۲}\frac{۱}{n-۲}<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow n-۲>۱۰$$
$$n>۱۲\xrightarrow{\text{فرد } n}n\geq ۱۳$$

پس با توجه به نکته‌ی گفته شده در تست‌های داخل فصل:

$$Min(n)=\text{بزرگ‌تر } n-۱=۳۴-۱=۳۳$$

۶. گزینه‌ی «۳»

جملات دنباله‌ی $\left\{\cos\frac{۲\pi}{n+۱}\right\}$ به صورت $\left\{-۱,-\frac{۱}{۲},۰,\dots,۱\right\}$ است همان‌طور که می‌بینید جملات در حال افزایش و همگرا به یک هستند. بنابراین دنباله صعودی و کراندار است.

۷. گزینه‌ی «۱»

دنباله‌های $\{n^۲\},\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ هر دو صعودی هستند پس دنباله‌ی مجموع آن‌ها نیز صعودی است. از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}(n^۲+\cos\frac{\pi}{n})=\infty\Rightarrow \text{دنباله بی‌کران است.}$$

۸. گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+۱}}{\sqrt{n}}+۱=\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}+۱$$
$$n:\text{صعودی}\Rightarrow\frac{۱}{n}:\text{نزولی}\Rightarrow\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}:\text{نزولی}$$
$$\Rightarrow\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}+۱:\text{نزولی}$$

از طرفی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=۲$$

پس دنباله نزولی و کراندار است.

۹. گزینه‌ی «۳»

عدد همگرایی دنباله برابر ۲ است، بنابراین:

$$\left|\frac{۲n^۲-n}{n^۲+۱}-۲\right|<\frac{۲۵}{۱۰۰۰}\Rightarrow\left|\frac{۲n^۲-n-۲n^۲-۲}{n^۲+۱}\right|<\frac{۱}{۴۰}$$
$$\Rightarrow\left|\frac{-n-۲}{n^۲+۱}\right|<\frac{۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{n+۲}{n^۲+۱}<\frac{۱}{۴۰}$$
$$n^۲+۱>۴۰n+۸۰\Rightarrow n^۲-۴۰n-۷۹>۰$$
$$\Rightarrow Min(n_۰)=۴۲$$

۱۰. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-۱)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^۲-n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(n-\left|n-\frac{۱}{۲}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}n-(n-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

پس دنباله همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۱. گزینه‌ی «۴»

$$a_n=\frac{n+۳}{۲n+۱}\Rightarrow a'_n=\frac{۱-۶}{(۲n+۱)^۲}<۰\Rightarrow\text{دنباله نزولی است}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+۳}{۲n+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\text{همگرا و کراندار}$$

۱۲. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} \tan\frac{\pi}{n} = \tan 0 = 0 \Rightarrow$$ همگرا و کراندار است

۱۳. گزینه‌ی «۳»

حد دنباله صفر است بنابراین:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} - 0\right| < \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{20}$$

$$n+\sqrt{n} > 20 \Rightarrow n > 16 \Rightarrow n \ge 17$$

۱۴. گزینه‌ی «۲»

ابتدا جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$a_1 = \sqrt{2}\ ,\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

دنباله صعودی است. حال حد دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2+L}$$

$$\Rightarrow L^2 = 2+L \Rightarrow L = 2$$

پس دنباله صعودی و همگرا به ۲ است.

۱۵. گزینه‌ی «۲»

$$a_n = \frac{2n}{2n^2+1} \Rightarrow a'_n = \frac{2(2n^2+1)-4n(2n)}{(2n^2+1)^2}$$

$$= \frac{4n^2+2-8n^2}{(2n^2+1)^2} = \frac{2-4n^2}{(2n^2+1)^2} < 0 \Rightarrow$$ a_n نزولی است.

هم‌چنین:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^2+1} = 0 \Rightarrow$$ همگرا و کراندار است.

۱۶. گزینه‌ی «۳»

n: دنباله‌ای صعودی و مثبت است.

$\cos\frac{\pi}{n}$: به ازای $n \ge 2$ دنباله‌ای صعودی و مثبت است.

پس به ازای $n \ge 2$ قطعاً دنباله‌ی $a_n = n\cos\frac{\pi}{n}$ صعودی است.

چون $a_1 = -1$ و $a_2 = 0$ و $a_3 = \frac{3}{2}$ است، پس شرایط صعودی در این جملات نیز برقرار است و در نتیجه دنباله‌ی داده شده دنباله‌ای صعودی است. اما به دلیل اینکه $\lim_{n\to\infty} n\cos\frac{\pi}{n} = \infty$ است بنابراین دنباله کراندار نیست.

۱۷. گزینه‌ی «۲»

برای اینکه دنباله از بالا کراندار باشد باید $\lim_{n\to\infty} a_n \ne +\infty$ باشد که تنها در گزینه‌ی «۲» این حالت برقرار است.

۱۸. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = (\text{یک حدی})^\infty$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \text{حد} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{n+2}\right)n}$$

$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

۱۹. گزینه‌ی «۴»

چون حد دنباله‌ی گزینه‌ی «۴» برابر صفر است، بنابراین این دنباله کراندار است.

۲۰. گزینه‌ی «۴»

$$u_1 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$u_2 = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$u_3 = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\vdots$$

$$u_{19} = \cancel{\frac{1}{19}} - \frac{1}{20}$$

$$\text{جمع} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0/95$$