فصل نهم

حد و پیوستگی

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه‌ی «۱»

شرط لازم برای وجود مجانب مایل این است که: $x\to\infty \Rightarrow y\to\infty$

در اینجا برای اینکه $x=\frac{۲t}{t^۲-۱}$ به بی‌نهایت میل کند، با توجه به ریشه‌های مخرج، باید $t\to\pm۱$. وقتی $t\to ۱$، y هم به بی‌نهایت میل می‌کند. پس $t\to -۱$ قابل قبول نیست. حالا از فرمول‌های محاسبه‌ی مجانب مایل استفاده می‌کنیم:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to ۱}\frac{y}{x}=\lim_{t\to ۱}\frac{\frac{t+۱}{t-۱}}{\frac{۲t}{t^۲-۱}}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t+۱)(t^۲-۱)}{(۲t)(t-۱)}$$

$$=\lim_{t\to ۱}\frac{(t+۱)(t-۱)(t+۱)}{(۲t)(t-۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t+۱)(t+۱)}{۲t}=۲\Rightarrow m=۲$$

از طرفی:

$$h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{t\to ۱}\left(\frac{t+۱}{t-۱}-۲\left(\frac{۲t}{t^۲-۱}\right)\right)=\lim_{t\to ۱}\left(\frac{t+۱}{t-۱}-\frac{۴t}{t^۲-۱}\right)$$

$$=\lim_{t\to ۱}\frac{(t+۱)^۲-۴t}{t^۲-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t^۲+۲t+۱)-۴t}{t^۲-۱}$$

$$=\lim_{t\to ۱}\frac{t^۲-۲t+۱}{t^۲-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)^۲}{(t-۱)(t+۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{t-۱}{t+۱}=۰\Rightarrow h=۰$$

پس معادله‌ی مجانب مایل برابر است با:

$$y=mx+h\Rightarrow y=۲x+۰\Rightarrow y=۲x$$

۲. گزینه‌ی «۲»

تابع مجانب قائم ندارد. پس برای محاسبه‌ی مجانب افقی، حد تابع را در بی‌نهایت بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{۳x+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{۳x}{\sqrt{x^۲}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{۳x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{۳x}{(-x)}=۳\Rightarrow y=۳:\text{افقی}\\[2mm]\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{۳x}{x}=-۳\Rightarrow y=-۳:\text{افقی}\end{cases}$$

پس تابع دو مجانب افقی دارد که قطعاً موازی هم هستند.

۳. گزینه‌ی «۴»

تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است. اما چون در $x=۱$ عامل صفرشونده داریم، تابع در $x=۱$ پیوسته است.

در نتیجه بزرگ‌ترین فاصله‌ای که تابع پیوسته است فاصله‌ی $[۰,۲)$ است.

۴. گزینه‌ی «۳»

ابهام حد $\frac{۰}{۰}$ است. از روابط تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۲x}{\sin x+\sin ۳x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۲x}{۲\sin ۲x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{۲\sin ۲x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{۲(۲\sin x\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۴\sin x}=\frac{۱}{۴}$$

۵. گزینه‌ی «۴»

تابع $y=\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$ در بازه‌ی $(-۲,۲)$ در نقاط $\left\{-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right\}$
و تابع $y=[x]$ در بازه‌ی $(-۲,۲)$ در نقاط $\{-۱,۰,۱\}$ ناپیوسته است.
پس تابع f در مجموع در هفت نقطه ناپیوسته است.

۶. گزینه‌ی «۲»

دنباله‌ی a_n به $\frac{۱}{۲}$ همگراست. با ضرب این حد در مخرج: $\frac{n-۱}{n+\frac{۱}{۲}}$

چون مخرج بزرگ‌تر از صورت است پس: $a_n\to\frac{۱^-}{۲}$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to\frac{۱^-}{۲}}f(x)=\lim_{x\to\frac{۱^-}{۲}}(x+[۴x])$$

$$=\lim_{x\to\frac{۱^-}{۲}}(x+[۲^-])=\lim_{x\to\frac{۱^-}{۲}}x+۱=\frac{۳}{۲}$$

۷. گزینه‌ی «۳»

در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}f(g(x))=f(۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}f(g(x))=f(-۱)=۱$$

همان‌طور که می‌بینید fog در $x=۰$ ناپیوسته است.

۸. گزینه‌ی «۳»

با توجه به هم‌ارزی گفته شده:

$$y=x\sqrt{\frac{x-۳}{x+۱}}\Rightarrow \text{مجانب مایل}: y=x-\frac{۳-(-۱)}{۲}\Rightarrow y=x-۲$$

۹. گزینه‌ی «۴»

ابهام حد از نوع $\frac{۰}{۰}$ است:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+x^۳}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+x^۳}{\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۲}}-\sqrt{۱-\frac{۴x^۲}{۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+x^۳}{\left(۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x^۲}{۲}\right)\right)-\left(۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴x^۲}{۲}\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+x^۳}{\left(۱-\frac{x^۲}{۴}\right)-(۱-x^۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+x^۳}{\frac{۳x^۲}{۴}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲(۱+x)}{\frac{۳x^۲}{۴}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱+x}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

۱۰. گزینه‌ی «۱»

ابهام از نوع $\frac{۰}{۰}$ است:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x\cos^{-۱}\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x^۲}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x\left(\sqrt{۱-(\sqrt{x})^۲}\right)}{\sqrt{۱-x^۲}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

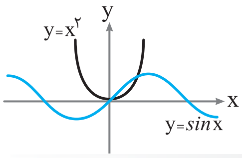
$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x}\sqrt{۱+x}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{\sqrt{۱+x}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۱. گزینه‌ی «۱»

با فرض $f(x)=\sin x - x^2$، چون f پیوسته است با کمک قضیه‌ی بولتزانو خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{36}>0 \\ f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi^2}{9}<0 \end{cases} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6})f(\frac{\pi}{3})<0$$

پس معادله در این بازه حداقل یک ریشه دارد. حالا با رسم نمودار دو منحنی $y=\sin x$ و $y=x^2$ می‌بینیم که معادله در بازه‌ی $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ فقط همین یک ریشه را دارد.



۱۲. گزینه‌ی «۲»

اول دقت کنید که: $2+\sqrt{3}\simeq 3/7$ از طرفی تابع $y=\left[x^2\right]$ در بازه‌ی داده شده در نقاطی که x^2 عدد صحیح است، ناپیوسته است:

$$x^2=k \Rightarrow x=\pm\sqrt{k} \xrightarrow{x\geq 2} x=\sqrt{k}$$

پس f در فاصله‌ی داده شده، در نقاط:

$$x=\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt{9},\sqrt{10},\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13}$$

ناپیوسته است. پس در ۹ نقطه ناپیوسته است.

دقت کنید که $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}\simeq 13/9$

پس $\sqrt{14}$ در این بازه قرار ندارد.

۱۳. گزینه‌ی «۲»

چون در هیچ نقطه‌ای ضابطه‌ی بالا و پایین با هم برابر نمی‌شوند پس f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۱۴. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sqrt{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{(2x)^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sqrt{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\sqrt{2}|x|)$$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(\sqrt{2}(x))=\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\sqrt{2}(-x))=-\sqrt{2} \end{cases}$$

از طرفی: $f(0)=\sqrt{2}$

چون $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ پس f در $x=0$ از راست پیوسته است.

۱۵. گزینه‌ی «۱»

با توجه به ریشه‌ی مخرج، تابع یک مجانب قائم $x=\frac{1}{2}$ دارد. از طرفی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\left|x+\frac{1}{2}\right|}{2x-1}$$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-(x+\frac{1}{2})}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2}}{2x-1}=0\Rightarrow y=0: \text{افقی} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+(x+\frac{1}{2})}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+\frac{1}{2}}{2x-1}=1\Rightarrow y=1: \text{افقی} \end{cases}$$

پس مجانب‌ها در دو نقطه‌ی $(-\frac{1}{2},0)$ و $(-\frac{1}{2},1)$ متقاطعند که فاصله‌ی نقاط تقاطع، یک واحد است.

۱۶. گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left[x^2+x\right]}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left[x(x+1)\right]}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left[0^-\right]}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{1+2^{\frac{1}{0^-}}}=\frac{-1}{1+2^{-\infty}}=\frac{-1}{1+0}=-1$$

۱۷. گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{2}x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{2}x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{x}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

۱۸. گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x-x^2}\sin\frac{1}{x}=(\text{صفر})\times\text{کراندار}=0$$

۱۹. گزینه‌ی «۲»

تابع داده شده یک مجانب افقی $y=2$ و دو مجانب قائم $x=-1$ و $x=3$ دارد. از طرفی:

$$y=\frac{2x^2-4x+5}{x^2-2x-3}\Rightarrow y=\frac{2(x-1)^2+3}{(x-1)^2-4}$$

با توجه به ضابطه‌ی بالا، محور تقارن منحنی، خط $x=1$ است که مجانب افقی تابع، آن را در نقطه‌ی $A(1,2)$ قطع می‌کند.

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ هم برابر است با:

$$OA=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

۲۰. گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to 0}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}(-x)\left[\frac{1}{x}\right]=-1 \end{cases}$$

پس تابع در $x=0$ حد ندارد.