

سؤالات کنکور ۱۳۹۹

سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۹

۱. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

- (۱) $-x+4$ (۲) $x+3$ (۳) $2x+6$ (۴) $2x-3$

۲. مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{4}x + 2$ ، کدام است؟

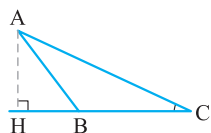
- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۳. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۴. قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

- (۱) $x=1$ (۲) $x=1/5$ (۳) $x=2$ (۴) $x=2/5$



۵. در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

- (۱) $3/25$ (۲) $3/5$ (۳) $3/6$ (۴) $3/75$

۶. اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۷. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱) 5π (۲) 6π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{2}$

۸. اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$. مجموع اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟

- (۱) 4120 (۲) 4020 (۳) 4010 (۴) 3980

۹. مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log 3 = 0.48)$

- (۱) 360 (۲) 300 (۳) 270 (۴) 240

۱۰. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۱

۱۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $-1/5$ (۲) $-1/2$ (۳) $-5/8$ (۴) $-5/6$

۱۲. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ ، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۳. نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط‌های مجانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است. $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) $1/25$ (۲) $1/5$ (۳) $1/75$ (۴) $-1/5$

۱۴. اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۵. آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21-x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

- (۱) $4 + \sqrt{2}$ (۲) $3 + 2\sqrt{2}$ (۳) $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (۴) $2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$

۱۶. خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۷. اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ برابر ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) -۳ (۴) -۱

سوالات کنکور خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸. به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $P(x)$ بر $x+2$ ، کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۹. نمودارهای دو تابع $y = |x-2| + |x+1|$ و $y = x+7$ ، در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) $10\sqrt{2}$

۲۰. با فرض $x \geq 2$ و $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

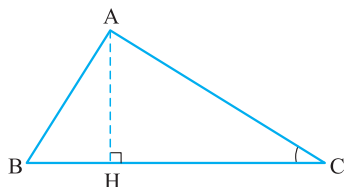
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۱. ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- (۱) ۰، ۲ (۲) -۱، ۱ (۳) -۱، ۲ (۴) -۲، ۱

۲۲. در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲



۲۳. اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{y}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۴. جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$ ، کدام است؟

- (۱) $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۲) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

۲۵. اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$. در این صورت

جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

- (۱) ۱۵۶۳ (۲) ۱۵۸۹ (۳) ۱۶۳۹ (۴) ۱۶۵۱

۲۶. در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ ($\log 2 = 0.3$ ، $\log 3 = 0.48$)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲

۲۷. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۰ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$

(۱) -۲

۲۹. تعداد نقاط ناپوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$; $|x| \leq 2$ ، کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

۳۰. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ ، فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

(۴) $y = \frac{3}{2}$ (۳) $y = \frac{1}{2}$ (۲) $y = -\frac{1}{2}$ (۱) $y = -1$

۳۱. اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ، کدام است؟

(۴) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱) $-\frac{2}{3}$

۳۲. فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

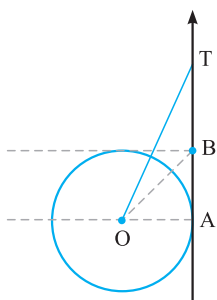
(۲) ۹

(۱) ۸

۳۳. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ ، مقدار $f'(2) - f'(5)$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{4}$

۳۴. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر $BT = 2$ باشد، مقدار $\tan(\widehat{TOB})$ ، کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ 

کنکور سراسری ۱۳۹۹

۱. گزینه ۳ روش اول:

با توجه به آزمون تقسیم داریم:

$$\begin{array}{l} P(x) \mid x-1 \\ \hline \Delta = P(-\frac{1}{2}) \end{array}, \quad \begin{array}{l} P(x) \mid 2x+1 \\ \hline \Delta = P(-\frac{1}{2}) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} P(x) \mid 2x^2-x-1 \\ \hline Q(x) \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{\Delta = P(-\frac{1}{2})} = \frac{Q(x)}{ax+b}$$

با توجه به آزمون تقسیم:

با جای گذاری مقادیر $x=1$ و $x=-\frac{1}{2}$ در تساوی بالا داریم:

$$\begin{cases} P(1) = 0 + a + b = 8 \\ P(-\frac{1}{2}) = 0 - \frac{a}{2} + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{-} \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 6$$

پس باقی مانده تقسیم برابر $ax+b=2x+6$ است.

روش دوم: اگر باقی مانده تقسیم را $R(x)=mx+n$ فرض کنیم، می توان مقادیر m, n را از حل دستگاه زیر تعیین کرد:

$$(x_1=1, r_1=8), (x_2=-\frac{1}{2}, r_2=5)$$

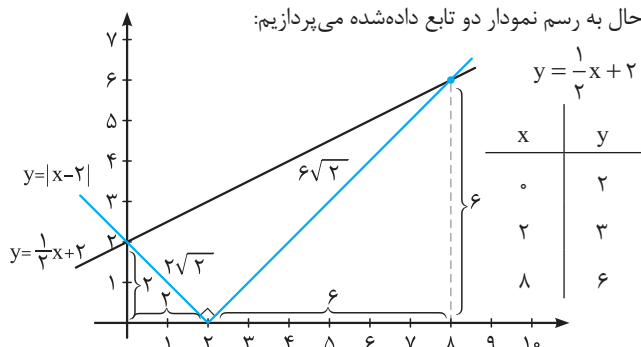
$$\begin{cases} mx_1+n=r_1 \\ mx_2+n=r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=8 \\ -\frac{1}{2}m+n=5 \end{cases} \xrightarrow{-} \frac{3}{2}m=3 \Rightarrow m=2 \Rightarrow n=6$$

در نتیجه باقی مانده برابر است با:

۲. گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع رادیکالی را ساده می کنیم:

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

حال به رسم نمودار دو تابع داده شده می پردازیم:



مساحت ناحیه بین دو تابع، مساحت یک مثلث قائم الزاویه و برابر است با:

$$S_{\Delta} = \frac{6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 12$$

۳. گزینه ۱ از درون به بیرون به محاسبه مقدار خواسته شده می پردازیم:

$$f(x) = x + \sqrt{x}, f^{-1}(20) = a \Rightarrow f(a) = 20$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$$

حال باید معادله $g(x) = 16$ را حل کنیم یعنی:

$$\frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 9x+6 = 16-16x \Rightarrow 25x = 10 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

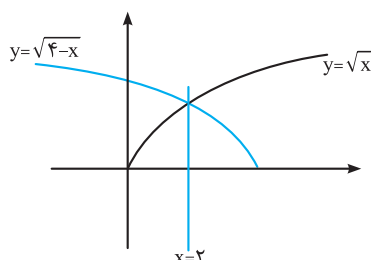
۴. گزینه ۳ کافی است بیان سؤال را به زبان ریاضی تبدیل کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} f_1(x) = \sqrt{-x}$$

انتقال ۴ واحدی به سمت راست

$$f_1(x) = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{4-x}$$

نمودار تابع اصلی یعنی $y = \sqrt{x}$ و تابع $y = \sqrt{4-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم.



نقطه تقاطع دو نمودار، نقطه $(2, \sqrt{2})$ می باشد. بنابراین نمودارها نسبت به خط $x=2$ متقارن اند.

۵. گزینه ۴ می دانیم که $1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C}$ در نتیجه:

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} = \frac{169}{25} \Rightarrow \cot^2 C = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25}$$

$$\Rightarrow \cot C = \frac{12}{5} \quad (C \text{ حاده است})$$

از طرف دیگر در هر مثلث قائم الزاویه مقدار کتانژانت یک زاویه برابر نسبت انداز ضلع مجاور به مقابل است لذا:

$$\cot C = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \Rightarrow AH = \frac{5 \times 9}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$$

۶. گزینه ۳ ابتدا کمان $\frac{11\pi}{4} + \alpha$ را ساده می کنیم:

$$\frac{11\pi}{4} + \alpha = \frac{12\pi - \pi}{4} + \alpha = 3\pi - \frac{\pi}{4} + \alpha = 2\pi + \pi + \alpha - \frac{\pi}{4} \equiv \pi + \alpha - \frac{\pi}{4} \quad (2k\pi \equiv 0)$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha) = \cos(\pi + \alpha - \frac{\pi}{4}) = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

$$= -(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}) = A$$

با توجه به اینکه $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ است مقدار $\cos \alpha$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{10})^2 = \frac{98}{100} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

توجه شود که چون α در ربع دوم است، $\cos \alpha$ منفی شده است.

پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\begin{aligned} A &= \cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha) = -(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}) \\ &= -(-\frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = -(-\frac{7}{10} + \frac{1}{10}) = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

۷. گزینه ۲

$$\tan 3x \times \tan x = 1 \xrightarrow{\text{(با فرض } \tan x \neq 0 \text{)}} \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

کافی است از قاعده هویتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x+1}} = \frac{2 - \sqrt{1}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{6 + 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2(3 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2}{9 - 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{7} = \frac{2 + \sqrt{2}}{7}$$

۱۲. گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & , |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & , |x-1| \geq 1 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

پیوستگی تابع f را در نقاط 0 ، 2 بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)[x] = 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 4 + 2a + b = 4 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1$$

$$\Rightarrow 4 + 2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1.5$$

۱۳. گزینه ۱

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$$

چون $y = -1$ مجانب افقی تابع است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

و چون خطوط $x = -2$ و $x = +1$ مجانب‌های قائم تابع هستند، پس باید ریشه‌های مخرج باشند:

$$\text{مخرج} = 2x^2 + bx + c = 2(x+2)(x-1) = 2(x^2 + x - 2)$$

$$2x^2 + 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + 2x - 4}$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{-2 - 3}{2 - 2 - 4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

۱۴. گزینه ۲ از طرفین تساوی $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$ مشتق می‌گیریم و می‌دانیم که:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{|\cos x|}$$

چون مشتق تابع g در $x = \frac{\pi}{3}$ مطرح است لذا مقدار $\cos x$ مثبت است. پس:

$$g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} f'\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

با جایگذاری $x = \frac{\pi}{3}$ در تساوی فوق داریم:

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos^2(\frac{\pi}{3})} \times f'\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} \times f'(2) = 2\sqrt{3}f'(2)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}f'(2) \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

۱۵. گزینه ۴ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$:

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36} + 24 - \sqrt{21 - 25} + 20}{1} = \frac{-3 + 24 - 2 + 20}{1} = 39$$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{16} = 3 - 4 = -1$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} = -1$$

و می‌دانیم که $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ در نتیجه:

$$\tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

برای تعیین جواب‌های واقع در بازه $[\pi, 2\pi]$ ، به k مقدار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم.

k	۴	۵
x	$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{11\pi}{8}$
k	۶	۷
x	$\frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{15\pi}{8}$

مجموع جواب‌های واقع در بازه $[\pi, 2\pi]$

$$= \frac{5\pi}{4} + \frac{11\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \frac{10\pi + 11\pi + 13\pi + 15\pi}{8} = \frac{49\pi}{8}$$

۸. گزینه ۳

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \dots$$

شماره آخرین جمله $= 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

$$\text{واقع در دسته بیستم}$$

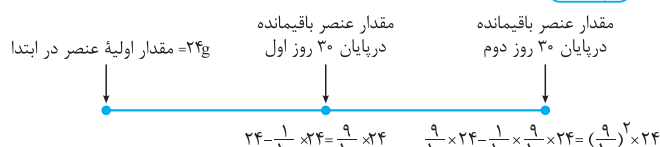
در نتیجه شماره اولین جمله واقع در دسته بیستم برابر است با:

$$210 - 19 = 191$$

پس مجموع این بیست جمله برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10(191 + 210) = 10 \times 401 = 4010$$

۹. گزینه ۱



$$\Rightarrow \text{مقدار عنصر باقی‌مانده پس از پایان } n \text{ تایی روز} = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times 24$$

می‌خواهیم فقط ۸ گرم از عنصر باقی بماند در نتیجه:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n \times 24 = 8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log\left(\frac{9}{10}\right)^n = \log\frac{1}{3} \Rightarrow n(\log 9 - \log 10) = -\log 3$$

$$\Rightarrow n = \frac{-\log 3}{\log 9 - 1} = \frac{\log 3}{1 - \log 9} = \frac{0.477}{1 - 0.954} = \frac{0.477}{0.046} \approx 10.37$$

در نتیجه باید ۱۲ تا دوره سی‌روزه بگذرد تا ۸ گرم از عنصر باقی بماند. لذا:

$$12 \times 30 = 360$$

۱۰. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \frac{\infty - 0}{\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

۱۱. گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{2 - \sqrt{8}}{2 - \sqrt{4}} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$



۲۰. گزینه ۴ با توجه به رابطه $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$ ، ابتدا تابع $(g \circ f)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = (g \circ f)(x) = \frac{3 - (x^2 - 4x + 9)}{2} = \frac{-x^2 + 4x - 6}{2}$$

اگر $x = -9$ ، نقطه‌ای روی تابع $(g \circ f)^{-1}$ باشد، نقطه‌ای با عرض $y = -9$ در تابع $g \circ f$ صدق می‌کند. پس:

$$\begin{aligned} -9 &= \frac{-x^2 + 4x - 6}{2} \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \\ \Rightarrow (x - 6)(x + 2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به این که $x \geq 2$ است پس تنها $x = 6$ قابل قبول است.

۲۱. گزینه ۲ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات، داریم:

$$y = -(-x - 1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت بالا}} g(x) = -(x - 1)^2 + 4$$

با برابر قرار دادن تابع $g(x)$ و $f(x)$ ، طول نقاط تلاقی را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} -(x - 1)^2 + 4 &= (x - 1)^2 \\ \Rightarrow -(x^2 - 2x + 1) + 4 &= x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

۲۲. گزینه ۳ $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{CH^2}{AH^2} = \frac{5}{4}$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب مخرج در صورت}} \frac{CH^2 + AH^2}{AH^2} = \frac{5 + 4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AH^2} = \frac{9}{4} \xrightarrow{AC=96} \frac{(96)^2}{AH^2} = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{جذر ۹۶}} \frac{96}{AH} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 192 = 3AH \Rightarrow AH = 64$$

۲۳. گزینه ۱ a در ربع اول قرار دارد بنابراین:

$$\tan a = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ و } 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow 1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 a + \cos^2 a = 1} \sin a = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

حال مقدار خواسته شده در سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\sin\left(\frac{13\pi}{6} + a\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) \cos a + \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) \sin a$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{4}{5}$$

۲۴. گزینه ۱ حاصل $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ و $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ را می‌یابیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$$

این عبارت را با $\cos 2x$ مساوی قرار می‌دهیم و مجموعه جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\cos x = \cos 2x \Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = -2k\pi \end{cases}$$

چون a در ربع اول قرار دارد بنابراین فقط $x = \frac{2k\pi}{3}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = 2 - x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 21 - x^2 + 4x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Rightarrow 21 - x^2 + 4x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 8 \times 17}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{8(8 + 17)}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{8 \times 25}}{4}$$

$$= 2 \pm \frac{5 \times 2\sqrt{2}}{4} = 2 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

و چون باید عدد در بازه $[5, 6]$ باشد، پس مقدار $2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ قابل قبول است.

۱۶. گزینه ۳

$$f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$$

مختصات نقطه به طول $x = 4$ واقع بر تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(4) = \frac{5 \times 4 - 4}{\sqrt{4}} = 8 \Rightarrow A(4, f(4)) = (4, 8)$$

$$f'(4) = \frac{5 \times \sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}}(20 - 4)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{10 - \frac{1}{4}(16)}{4} = \frac{3}{2} = m \text{ مماس}$$

در نتیجه معادله خط مماس عبارت است از:

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ } x=0} y - 8 = \frac{-12}{2} = -6 \Rightarrow y = 2$$

۱۷. گزینه ۴ چون $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ می‌باشند، لذا:

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{3}{2}, P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

با استفاده از بسط $\tan(\alpha + \beta)$ می‌توان نوشت:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{S}{1 - P} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

کنکور خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۸. گزینه ۱ اگر چندجمله‌ای $p(x)$ بر $2x - 1$ بخش پذیر باشد، باید ریشه

$2x - 1$ عبارت $p(x)$ را صفر کند.

$$p(x) = x(2x^3 + ax^2 + 2x - 3)$$

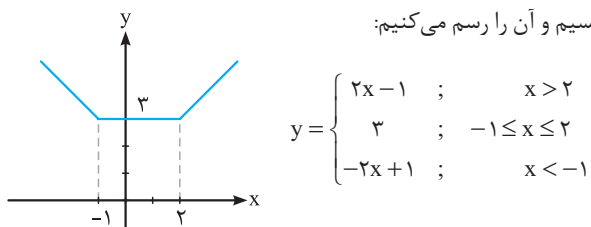
$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\right) = 0 \Rightarrow a = 7$$

برای یافتن باقی مانده $p(x)$ بر $x + 2$ ، کافی است، $p(-2)$ را بیابیم:

$$p(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = -10$$

۱۹. گزینه ۴ تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ را به صورت چندضابطه‌ای

می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، خط $y = x + 7$ دو خط $2x - 1$ و $-2x + 1$ را می‌تواند قطع کند. با به دست آوردن این نقاط، طول پاره خط واصل را می‌یابیم:

$$x + 7 = 2x - 1 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow A(8, 15)$$

$$x + 7 = -2x + 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B(-2, 5)$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(8 + 2)^2 + (15 - 5)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

۳۰. **گزینه ۲** از آنجایی که تابع مخرجی از درجه ۲ دارد و فقط یک مجانب قائم به معادله $x = 2$ دارد، پس مخرج آن حتماً به صورت $2(x-2)^2$ یعنی $2x^2 - 8x + 8$ است.

$$f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 8}$$

با توجه به این که $f(3) = 6$ است پس:

$$f(3) = 6 \Rightarrow \frac{9a + 21}{2} = 6 \Rightarrow 9a + 21 = 12 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$$

برای یافتن مجانب افقی تابع، حد آن را در بی نهایت می‌یابیم:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 8} = -\frac{1}{2}$$

۳۱. **گزینه ۲** با استفاده از مشتق تابع مرکب می‌توان نوشت:

$$g'(x) = \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} f'\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$$

$$= \frac{-2\cos x}{(1 + \sin x)^2} f'\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$$

به x مقدار $\frac{\pi}{6}$ می‌دهیم:

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2\cos \frac{\pi}{6}}{(1 + \sin \frac{\pi}{6})^2} f'\left(\frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6}}\right) \Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{9}{4}} f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-4\sqrt{3}}{9} f'\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

۳۲. **گزینه ۴** دو منحنی در یک نقطه دارای مماس مشترک هستند، بنابراین عرض‌های دو تابع و مشتق‌های دو تابع در این نقطه برابرند.

$$\begin{cases} x = 4 \Rightarrow x\sqrt{x} = x^2 + ax + b \Rightarrow 8 = 16 + 4a + b \\ \Rightarrow 4a + b = -8 \\ x = 4 \Rightarrow (\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})x = 2x + a \Rightarrow 2 + 1 = 8 + a \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

از دستگاه بالا حاصل b برابر ۱۲ است.

۳۳. **گزینه ۱** برای محاسبه مشتق در $x = 2$ فقط از ضابطه بالا مشتق می‌گیریم:

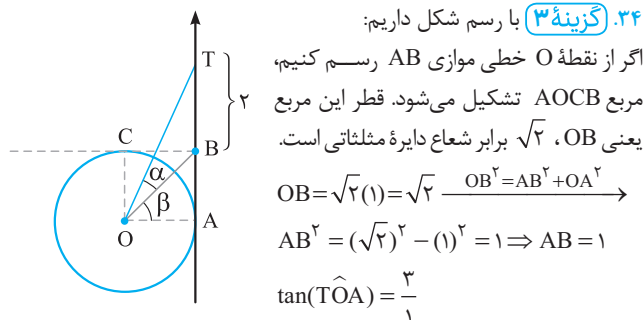
$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{2(2) + 6}{2\sqrt{4 + 6(2)}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

در همسایگی $x = 5$ حاصل $\left[\frac{x}{4}\right]$ برابر ۱ است، بنابراین:

$$f(x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۳۴. **گزینه ۳** با رسم شکل داریم:



$$\tan(\widehat{BOA}) = \frac{1}{1} \Rightarrow \widehat{BOA} = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan(\widehat{TOA}) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + \tan \alpha = 3 - 3 \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

۲۵. **گزینه ۳** تعداد جملات دسته‌ها به صورت زیر است:

$$\underbrace{1, 2, 3, \dots, 40, \dots}_{S_4}$$

حال باید ببینیم جمله آخر دسته چهلم، جمله چندمین عدد است:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_4 = 20(1 + 40) = 820$$

جمله ۸۲۰ام اعداد طبیعی فرد طبق الگوی زیر به دست می‌آید:

$$t_n = 2n - 1 \Rightarrow t_{820} = 2(820) - 1 = 1639$$

۲۶. **گزینه ۲** غلظت برابر است با نسبت حجم محلول به حلال. در ابتدا غلظت

برابر ۱۰۰٪ ولی هر روز ۴ لیتر از محلول کم و به حلال اضافه می‌شود، یعنی هر

روز غلظت آن $\frac{96}{100}$ روز قبل می‌شود. بنابراین:

$$\left(\frac{96}{100}\right)^n = \frac{100}{3} \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{96}{100}\right)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین تساوی لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log\left(\frac{24}{25}\right)^n = \log \frac{1}{3} \Rightarrow n(\log 24 - \log 25) = -\log 3$$

هم چنین می‌دانیم $\log 5 = 1 - \log 2$ ، بنابراین:

$$n(0.48 + 3(0.3) - 2(1 - 0.3)) = -0.48 \Rightarrow n = 24$$

۲۷. **گزینه ۲**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

حالت $\frac{\infty}{\infty}$ است. در چنین شرایطی هر چه به جز بی نهایت صورت به روی بی نهایت مخرج را می‌توان حذف کرد:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{+\infty} - 3^{-\infty}}{2 \times 3^{+\infty} - 3^{-\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

۲۸. **گزینه ۱**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x})\sqrt{1+\cos x}}{(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x})\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{\sqrt{2+3x}} + \cancel{\sqrt{2-x}} + x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{|\sin x|}$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{-\sin x} = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

۲۹. **گزینه ۲** تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ در بازه $[-2, 2]$ براساس نص صریح

کتاب درسی نظام جدید در نقاط $x = \pm 2$ ناپیوسته است.

نقاط مشکوک به ناپیوستگی درون بازه $x = 0$ و $x = \pm 1$ هستند که به ازای

آن‌ها عبارت داخل براکت عددی صحیح می‌باشد.

در همه این نقاط، حاصل $\sin \pi x$ برابر صفر است و حدهای چپ و راست و

مقدار تابع در این نقاط برابر و همگی صفر هستند و پیوسته.

در مجموع، تابع در این بازه در دو نقطه ناپیوسته است.

براساس کتاب نظام قدیم، نقاط -2 و 2 نقاط پیوستگی تابع می‌باشند.



مجموعه ریاضی

نظام جدید

رشته ریاضی

کاملترین کتابهای مرور و جمع بندی کنکور در ۱۴ ساعت

فروشگاه اینترنتی: shop.mehromah.ir

فروشگاه تلفنی: ۰۲۱ ۶۶۴۷۹۳۱۱