

سؤالات کنکور ۱۳۹۹

سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۹

۱. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1+\sqrt{3}$ (۲) $-1+\sqrt{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

۲. اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته بندی می کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$. در دسته ی نهم، واسطه ی حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

- (۱) ۷۱ (۲) ۷۲ (۳) ۷۳ (۴) ۷۴

۳. فرض کنید چند جمله ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$ ، آنگاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۴. معادله ی درجه ی دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) $-\frac{5}{2}$

۵. مجموعه ی جواب نامعادله ی $3 < \frac{x+1}{2x-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $(0/6, 1/5)$ (۲) $(0/8, 1/2)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(0/8, 2)$

۶. فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ ، بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

۷. نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم. فاصله ی نقطه ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

۸. در بازه ی (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه ی $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹. اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$

۱۰. اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۱. تابع f با ضابطه ی $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه ی $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه ی چهارم را با کدام طول، قطع می کند؟

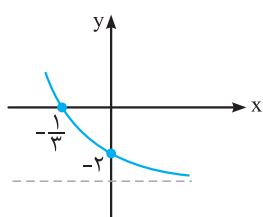
- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۲. اگر $\log_2 3 = 0/8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{18}$ (۲) $\frac{8}{11}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{7}{9}$

۱۳. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ ، کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۶۰ (۳) ۴۸ (۴) ۲۸

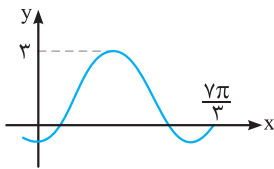


۱۴. فرض کنید در دامنه‌ی $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ ، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

$\log_2(2 + \sqrt{3})$ (۴) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۳) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۲) $\log_2(2 - \sqrt{3})$ (۱)

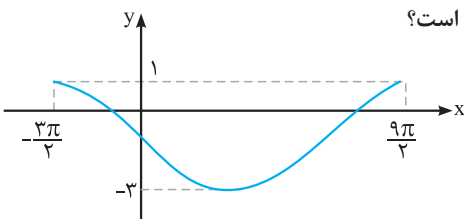
۱۵. حاصل عبارت $\tan(30^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(480^\circ)\sin(840^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

$-\frac{1}{2}$ (۱) 2 (۲) 1 (۳) 2 (۴)



۱۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟

2 (۱) 1 (۲) -1 (۳) -2 (۴)



۱۷. شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه‌ی تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

-2 (۱) -3 (۲) -4 (۳) -6 (۴)

۱۸. جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{3}$ (۱)

۱۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x| + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

1 (۴) 3 (۳) -1 (۲) $-\infty$ (۱)

۲۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، کدام است؟

$\frac{5}{36}$ (۴) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۱)

۲۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ ، در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

۲۲. مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ ، کدام است؟

$-\frac{15}{4}$ (۴) $-\frac{5}{2}$ (۳) $-\frac{5}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

۲۳. فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه‌ی اول کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴) 2 (۳) $\sqrt{2}$ (۲) 1 (۱)

۲۴. از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه‌ی وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

$\frac{\sqrt{2}}{1}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ (۲) $\frac{2}{1}$ (۱)

۲۵. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

95 (۴) 91 (۳) 87 (۲) 84 (۱)

۲۶. پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$\frac{1}{56}$ (۴) $\frac{1}{28}$ (۳) $\frac{1}{21}$ (۲) $\frac{1}{14}$ (۱)

۲۷. ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

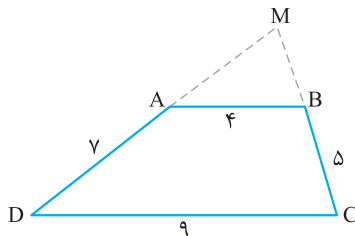
داده	
۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴	

- ۰/۱۲ (۱) ۰/۱۵ (۲) ۰/۱۷ (۳) ۰/۱۸ (۴)

۲۸. مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ ، مفروض است. اندازه‌ی ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

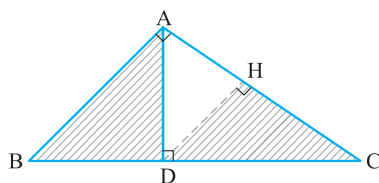
- ۴ (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۵ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴)

۲۹. اندازه‌ی اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB ، کدام است؟



- ۱۳/۲ (۱)
۱۳/۶ (۲)
۱۴/۴ (۳)
۱۴/۸ (۴)

۳۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی HCD و ABD ، کدام است؟



- $\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{4}{7}$ (۲)
 $\frac{16}{21}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴)

سؤالات کنکور خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۱. حاصل عبارت $(2 - \sqrt{3})^{-1} + \frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}}$ ، کدام است؟

- $1 + 2\sqrt{3}$ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴)

۳۲. جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله‌ی حسابی، جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی، هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی، کدام است؟

- $\frac{4}{3}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴)

۳۳. فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

- ۷ (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) -۱ (۴)

۳۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m ، کدام است؟

- $(-4, 0)$ (۱) $(-4, -2)$ (۲) $(-6, 0)$ (۳) $(-6, -4)$ (۴)

۳۵. مجموعه جواب نامعادله‌ی $2 < \frac{2x-1}{x+1} < -1$ ، کدام است؟

- $(0, +\infty)$ (۱) $(4, +\infty)$ (۲) $\mathbb{R} - [-4, 0]$ (۳) $\mathbb{R} - [-4, -1]$ (۴)

۳۶. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

- $(5, -7)$ (۱) $(5, -9)$ (۲) $(2, 5)$ (۳) $(1, 5)$ (۴)

۳۷. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- $4\sqrt{5}$ (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

۳۸. در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴)

۳۹. اگر $f(x) = |x| - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- $[-1, 1)$ (۱) $(-1, 1]$ (۲) $[1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴)

۴۰. فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ ، کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

۴۱. تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

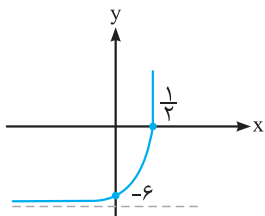
- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

۴۲. اگر $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ باشد، آن‌گاه $\log_{18} 8$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{22}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{8}{11}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۴۳. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{ax+b}$ است. $f(2)$ ، کدام است؟

- (۱) 234 (۲) 108 (۳) 72 (۴) 18

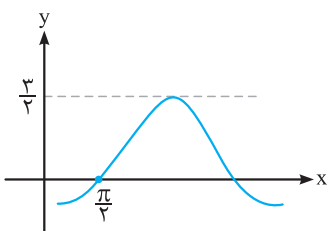


۴۴. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

- (۱) $\log_2(-1 + \sqrt{5})$ (۲) $\log_2(1 + \sqrt{5})$ (۳) $\log_2(2 + \sqrt{5})$ (۴) $\log_2(3 + \sqrt{5})$

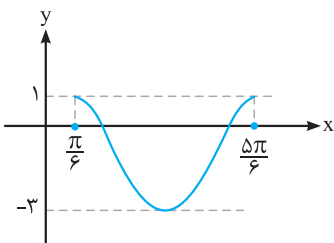
۴۵. حاصل عبارت $\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(105^\circ)\cos(255^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

- (۱) $\sin^2(15^\circ)$ (۲) $\cos^2(15^\circ)$ (۳) $-\sin^2(15^\circ)$ (۴) $-\cos^2(15^\circ)$



۴۶. شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a ، کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1



۴۷. شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، در یک بازه تناوب است. مقادیر b و c ، کدام‌اند؟

- (۱) $b = 3, c = -1$ (۲) $b = 3, c = -2$ (۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$ (۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

۴۸. تعداد جواب‌های معادله $\sin(3x)\cos(3x) = 1$ ، در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۴۹. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

- (۱) $1/5$ (۲) 1 (۳) -1 (۴) $-1/5$

۵۰. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{17}$ (۲) $-\frac{6}{17}$ (۳) $-\frac{5}{12}$ (۴) $-\frac{6}{11}$

۵۱. خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار b ، کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۵۲. مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۳. مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ ، کدام است؟

- (۱) $-1+\sqrt{5}$ (۲) $1+\sqrt{5}$ (۳) $-1+\sqrt{3}$ (۴) $1+\sqrt{3}$

۵۴. کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) $3\sqrt{2}$

۵۵. به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آن‌که هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۵۰

۵۶. ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{9}{10}$

۵۷. داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها، کدام است؟ ($\sqrt{\frac{2}{7}} \cong 0/534$)

- (۱) ۰/۱۵ (۲) ۰/۲۰ (۳) ۰/۲۵ (۴) ۰/۳۰

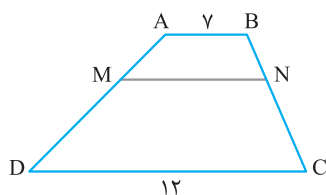
۵۸. اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+2x=16$ ، $y-x=2$ و $y=0$ هستند. اندازه‌ی میانه‌ی نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه‌ی

مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

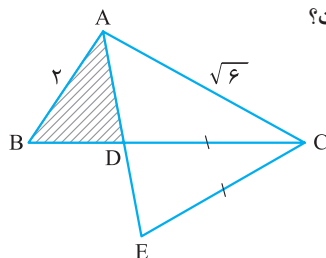
۵۹. در دوزنقه‌ی ABCD، پاره خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه‌ی MN، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) $8/75$ (۳) ۹ (۴) $9/5$



۶۰. در شکل زیر، AD نیمساز زاویه‌ی A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



کنکور سراسری ۱۳۹۹

گزینه ۲

$$\frac{\sqrt{18} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt{9} - 1)^{-1} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})(5 + \sqrt{6})}{(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6})} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{12} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt{18}}{25 - 6} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{19} - (\sqrt{3} + 1) = \frac{19(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{19} - (\sqrt{3} + 1)$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

گزینه ۲

دسته‌ی سوم: $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
دسته‌ی دوم: $\{2, 3, 4\}$
دسته‌ی اول: $\{1\}$

۱. $n^2 + 1 = \text{اولین عدد دسته‌ی } (n+1) \Rightarrow n^2 \Rightarrow \text{آخرین عدد دسته‌ی } n$

۲. $65 = \text{اولین عدد دسته‌ی نهم} \Rightarrow 64 = 8^2 \Rightarrow \text{آخرین عدد دسته‌ی هشتم}$

۳. $81 = 9^2 \Rightarrow \text{آخرین عدد دسته‌ی نهم}$

۴. $\frac{65 + 81}{2} = \frac{146}{2} = 73$ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد اول و آخر

۵. چون $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، داریم:

۱. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} p(1) = 0 \\ p(-1) = 0 \end{cases}$

۲. در این جا به نظر می‌رسد که منظور طراح سؤال از حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ همان باقی‌مانده‌ی تقسیم است؛ پس:

۳. $\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow r = Q(2) \\ Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x) \end{cases}$

۴. $\Rightarrow r = Q(2) = p(1) + p(-1) = 0 + 0 = 0$

پس حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ برابر صفر است.

گزینه ۱

۱. $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$

۲. $x_1 + x_2 = \frac{1}{x_1 x_2} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}}$

۳. $\Rightarrow -\frac{2m - 1}{3} = \frac{3}{2 - m} \Rightarrow (2m - 1)(m - 2) = 9$

۴. $\Rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{7}{2} \end{cases}$

حالا Δ را بررسی می‌کنیم:

۱. $\Delta = (2m - 1)^2 - 4 \times 2(2 - m) \xrightarrow{m=-1} \Delta = 9 - 36 < 0$

۲. پس $m = \frac{7}{2}$ قابل قبول است.

گزینه ۴

۱. $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3 \xrightarrow{-2} -1 < \frac{x+1}{2x-1} - 2 < 1$

۲. $\Rightarrow -1 < \frac{x+1-4x+2}{2x-1} < 1$

۳. $\Rightarrow -1 < \frac{3-3x}{2x-1} < 1 \Rightarrow |3-3x| < |2x-1|$

۴. $\xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 - 18x + 9x^2 < 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 5x^2 - 14x + 8 < 0$

۵. $\Rightarrow (\Delta x - 4)(x - 2) < 0 \Rightarrow \frac{4}{\Delta} < x < 2 \Rightarrow 0 < x < 2$

گزینه ۱

۱. $f(x) = ax^2 + bx + c$

۲. $\begin{cases} A(-2, \Delta) \in f \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = \Delta \\ B(0, \Delta) \in f \Rightarrow a \times 0 + b \times 0 + c = \Delta \Rightarrow c = \Delta \\ C(1, 11) \in f \Rightarrow a + b + c = 11 \end{cases}$

۳. $\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + \Delta = \Delta \\ a + b + \Delta = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

۴. $\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x + \Delta \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 + \Delta = 3$

۵. پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1, 3)$ می‌گذرد.

گزینه ۳

۱. $f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow x-12} y_1 = \sqrt{x-12}$

۲. $\xrightarrow{\text{واحد به سمت بالا}} y_2 = \sqrt{x-12} + 2$

۳. $\xrightarrow{\text{تلاقی با } f} \sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \Rightarrow x = 16$

۴. $y = \sqrt{x} \rightarrow A(16, 4)$ نقطه‌ی تلاقی

۵. $\xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{4^2(4^2 + 1)} = 4\sqrt{17}$

گزینه ۱

۱. $|2x^2 - 4| < 2x \xrightarrow{\div 2} |x^2 - 2| < x \xrightarrow{x > 0} \begin{cases} 0 < x^2 + x - 2 \Rightarrow (x-1)(x+2) > 0 \\ \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$

۲. $-x < x^2 - 2 < x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \\ \Rightarrow -1 < x < 2 \end{cases}$

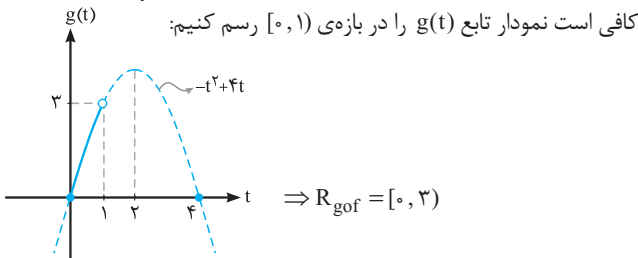
۳. $1 \cap 2 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow x \in (1, 2) \Rightarrow \max(b-a) = 2 - 1 = 1$

گزینه ۲

۱. $f(x) = 2x - [2x]$, $g(x) = -x^2 + 4x$

۲. $0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow 0 \leq t < 1$ می‌دانیم

۳. $\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(t) = -t^2 + 4t$; $0 \leq t < 1$



گزینه ۳

۱. $\Rightarrow g(x) = f^{-1}(x)$

۲. $g(6) = f^{-1}(6) = a \Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$

۳. $g(12) = f^{-1}(12) = b \Rightarrow f(b) = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \Rightarrow b = 9$

۴. $\Rightarrow g(6) + g(12) = a + b = 4 + 9 = 13$

گزینه ۲

۱. $y = x - \frac{2}{x}$; $x < 0$

۲. $\xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ با } y} x = y - \frac{2}{y}$; $y < 0$

۳. $\xrightarrow{\times y} xy = y^2 - 2 \Rightarrow y^2 - \frac{x}{b}y - \frac{2}{c} = 0$

۴. $\xrightarrow{\Delta = x^2 + 8} y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 8}}{2} \xrightarrow{*} y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2} = f^{-1}$

با توجه به نمودار داده شده و مقایسه‌ی آن با نمودار $\sin x$ ، متوجه می‌شویم که a و b مختلف‌العلامت هستند. از نمودار داده شده مطالب زیر مشخص است:

$$\begin{cases} \max = 1 \Rightarrow c + |a| = 1 \\ \min = -3 \Rightarrow c - |a| = -3 \\ T = \frac{9\pi}{2} \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = -\frac{1}{3} \\ a = -2, b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

۱۸. گزینه ۴

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

۱۹. گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{[-2^-] + 3}{-2^- + 2} = \frac{-3 + 3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = \text{صفر واقعی} = 0$$

۲۰. گزینه ۱

$$f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{4x^n} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x - 12} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2 \times 2}{3 \times 4}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{24}$$

۲۱. گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - 2x} & x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & x > -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{5 - 2x}} & x < -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2 - 2b + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \Rightarrow c = 2b + 5$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } \begin{cases} f'_-(-2) = \frac{-1}{\sqrt{5 + 4}} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(-2) = 2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 + b = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \xrightarrow{*} c = 2\left(-\frac{7}{3}\right) + 5 = \frac{1}{3}$$

$$y = -x \text{ با } f^{-1} \text{ تلاقی} \rightarrow -x = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2} \Rightarrow -2x = x - \sqrt{x^2 + 8}$$

$$3x = \sqrt{x^2 + 8} \xrightarrow{x > 0} 9x^2 = x^2 + 8 \Rightarrow 8x^2 = 8 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

۱۲. گزینه ۱

$$\log_6 3 = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow \log_3 6 = \frac{10}{\lambda} = \frac{5}{\lambda} \quad 1$$

$$\Rightarrow \log_3 2^2 = \frac{5}{\lambda} \Rightarrow 2 \log_3 2 = \frac{5}{\lambda} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{5}{2\lambda} \quad 2$$

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_3 6}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2 \times 3)}{\log_3 (4 \times 3)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 4 + \log_3 3}$$

$$\frac{1}{\frac{5}{2\lambda} + 1} = \frac{\frac{13}{\lambda}}{\frac{9}{\lambda} + 1} = \frac{13}{18}$$

۱۳. گزینه ۲

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \\ f(0) = -2 \end{cases} \quad \text{با توجه به شکل}$$

$$\begin{cases} f(0) = -4 + 2^b = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 + 2^{-\frac{a}{3} + 1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{a}{3} + 1} = 4 = 2^2 \\ \Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -4 + 2^{-x+1} \Rightarrow f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^6 = -4 + 64 = 60$$

۱۴. گزینه ۲

$$f^{-1}(2) = ? \xrightarrow{\text{فرض}} f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \Rightarrow f(a) = \frac{2^a + 2^{-a}}{2} = 2 \Rightarrow 2^a + 2^{-a} = 4$$

$$\xrightarrow{2^a = t > 0} t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow t = 2^a = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \log_2 2^a = \log_2 (2 + \sqrt{3}) \Rightarrow a = \log_2 (2 + \sqrt{3})$$

۱۵. گزینه ۲

$$300 = 360 - 60, \quad 210 = 180 + 30, \quad 480 = 540 - 60, \quad 1840 = 900 - 60$$

$$\Rightarrow \text{خواسته‌ی تست} = \tan(360^\circ - 60^\circ) \times \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(540^\circ - 60^\circ) \times \sin(90^\circ - 60^\circ) = (-\tan 60^\circ)(-\cos 30^\circ) + (-\tan 60^\circ)(\sin 60^\circ) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

۱۶. گزینه ۴

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a + b \cos x$$

با توجه به شکل داده شده و رفتار تابع $\cos x$ ، متوجه می‌شویم که $b < 0$ است، پس:

$$\begin{cases} \max = 3 \Rightarrow a + |b| = 3 \xrightarrow{b < 0} a - b = 3 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ b = -2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = a \sin(bx) + c$$

۱۷. گزینه ۴

$$n(S) = (3+5)! = 8!$$

۲۶. گزینه ۳

$$\Rightarrow n(A) = 5! \times 3! \times 2! = 5! \times 12$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5! \times 12}{8!} = \frac{5! \times 12}{8 \times 7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{28}$$

$$\bar{x} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = 12$$

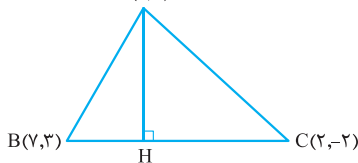
۲۷. گزینه ۲

$$\sigma^2 = \frac{5(10-12)^2 + 4(11-12)^2 + 7(14-12)^2}{16} = \frac{4 \times 13}{16}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \approx \frac{3/6}{2 \times 12} = \frac{3}{20} = 0.15$$

A(1,5)

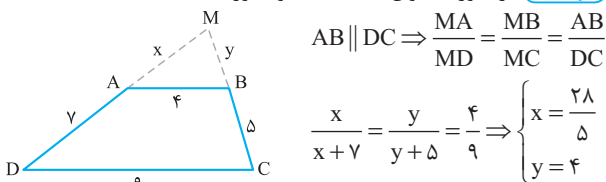


$$m_{BC} = \frac{-2-3}{2-7} = 1$$

$$BC \text{ معادله‌ی خط: } y-3=1(x-7) \Rightarrow x-y-4=0$$

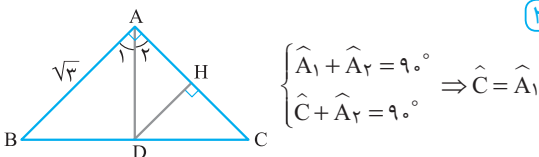
$$\left\{ \begin{array}{l} A(1,5) \\ x-y-4=0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فاصله‌ی نقطه از خط}} AH = \frac{|1-5-4|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

۲۹. گزینه ۲ در صورت سؤال باید گفته شود دوزنقه‌ی ABCD:



$$MAB \text{ مثلث} = \frac{28}{5} + 4 + 4 = \frac{68}{5} = 13 \frac{3}{5}$$

۳۰. گزینه ۳



یعنی مثلث‌های ABD و CDH با هم متشابه هستند.

$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = \sqrt{3} \\ AC = 2 \end{array} \right. \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$AD \times BC = AB \times AC \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{7}}$$

$$\triangle ADC: DC^2 = 4 - \left(\frac{\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 4 - \frac{12}{7} = \frac{16}{7} \Rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\xrightarrow{*} \frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{21}$$

۲۲. گزینه ۴

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3 = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - 3(x^2-x)^2(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{(6)(2)^3 - 3 \times 2(2)^2(8)}{(2)^6} = \frac{6 \times 8(1-6)}{64} = \frac{-15}{4}$$

۲۳. گزینه ۱

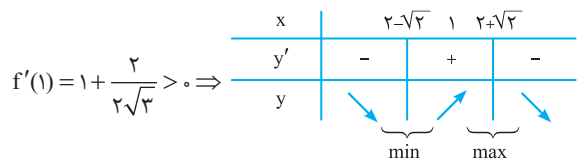
$$f(x) = x + \sqrt{4x-x^2} = x + \sqrt{4-(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2(x-2)}{2\sqrt{4x-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x-x^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow 2x^2-8x+4=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad (\text{ریشه‌های ساده})$$



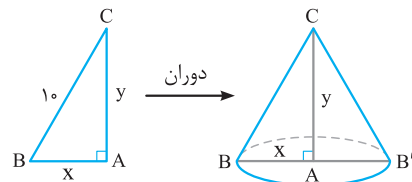
$$f(2+\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2} + \sqrt{4-(2+\sqrt{2}-2)^2}$$

$$= 2+\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max(2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}) \\ x-y=0 \end{array} \right. \Rightarrow d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|2+\sqrt{2}-(2+2\sqrt{2})|}{\sqrt{1+1}} = 1$$

۲۴. گزینه ۴



$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi (x)^2 \times y \quad 1$$

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \quad 2$$

$$\xrightarrow{1} V = \frac{\pi}{3} (100 - y^2) y$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (100y - y^3) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3y^2) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{2} x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

۲۵. گزینه ۳

$$\text{همه‌ی حالات ممکن} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

$$\text{تعداد حالاتی که هر دو نفر شرکت کنند} = \binom{2}{2} \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالات مطلوب} = 126 - 35 = 91$$

۳.۵. گزینه ۳: روش اول:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \\ \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0 \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \end{cases}$$

اشتراک دو مجموعه جواب بالا که روی شکل نشان داده شده، برابر است با:

$$\Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > 0$$

که می توان آن را به صورت $\mathbb{R} - [-4, 0]$ در نظر گرفت.

روش دوم (ردگزینه): عددی به اختیار از بین گزینه ها چنان انتخاب می کنیم که در برخی باشد و در برخی نباشد، مانند $x = 2$ و آن را در نامعادله جای گذاری می کنیم.

$$-1 < \frac{2(2)-1}{2+1} < 3 \Rightarrow -1 < 1 < 3$$

نامعادله صحیح است، پس $x = 2$ باید در گزینه ی درست باشد. **گزینه های ۲، ۴، و ۵** فاقد مقدار $x = 2$ هستند و باید حذف شوند.

عدد دلخواه دیگری مانند $x = -5$ مثال می زنیم که در **گزینه ی ۱** نیست، ولی در **گزینه ی ۳** هست.

$$-1 < \frac{2(-5)-1}{-5+1} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{-11}{-4} < 3$$

نامعادله درست است، پس **گزینه ی ۱** که فاقد $x = -5$ است، نیز حذف می شود. **۳.۶. گزینه ۲** ضابطه ی سهمی با رأس (m, h) عبارت است از:

$$y = a(x-m)^2 + h$$

در نتیجه ضابطه ی سهمی مورد سؤال $y = a(x+1)^2 + 9$ است.

چون سهمی از نقطه ی $(3, 1)$ عبور می کند، پس این نقطه در ضابطه ی آن صدق می کند، پس داریم:

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow -8 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

ضابطه ی سهمی $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$ و نقطه ی $(5, -9)$ در آن صدق می کند.

۳.۷. گزینه ۱ برای قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محور x باید آن را در منفی یک ضرب کنیم، بنابراین $y = -x^2 + 2x$. سپس به دلیل انتقال ۱۶ واحدی به بالا، ضابطه به $y = -x^2 + 2x + 16$ تغییر می کند. برای یافتن نقطه ی برخورد دو منحنی ضابطه ی آن ها را برابر می گذاریم.

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4, x = -2 \text{ غرق ق}$$

نقطه ی برخورد $(4, 8)$ است. فاصله ی نقطه ی $A(x, y)$ از مبدأ $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

است؛ پس:

$$d = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۳.۸. گزینه ۲ اگر در بازه ی (a, b) نمودار $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار $y = 4x^4$ باشد، در این بازه باید:

$$(x-1)^2 > 4x^4 \Rightarrow (x-1)^2 - 4x^4 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 - (2x^2)^2 > 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ((x-1) - 2x^2)((x-1) + 2x^2) > 0$$

$$\Rightarrow (-2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1) > 0 \quad *$$

دلتای عبارت درجه ی دوم $-2x^2 + x - 1$ برابر -7 است، بنابراین با توجه به علامت ضریب x^2 که منفی است، علامت عبارت $-2x^2 + x - 1$ همواره منفی است؛

کنکور خارج از کشور ۱۳۹۹

۳.۱. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3}-1)(4-\sqrt{3})}{16-3} \\ &= \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{13} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

از طرفی عدد بعدی به روش زیر ساده می شود:

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = (\sqrt{3}-1) + (2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+1$$

۳.۲. گزینه ۴ روش اول: جمله های $t_7 = t_1 + 6d$ و $t_3 = t_1 + 2d$

جملات متوالی دنباله ی هندسی هستند؛ پس:

$$(t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 15d)$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 12t_1d + 36d^2 = t_1^2 + 17t_1d + 15d^2$$

در نتیجه:

$$6d^2 = 5t_1d \Rightarrow 6d = 5t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{6d}{5}$$

حالا قدرنسبت دنباله ی هندسی را محاسبه می کنیم که عبارت است از نسبت جمله ی بعد به جمله ی قبل:

$$q = \frac{t_1 + 6d}{t_1 + 2d} = \frac{\frac{6d}{5} + 6d}{\frac{6d}{5} + 2d} = \frac{\frac{36d}{5}}{\frac{16d}{5}} = \frac{9}{4}$$

روش دوم: هرگاه جمله های $m^{\text{ام}}$ ، $n^{\text{ام}}$ و $k^{\text{ام}}$ دنباله ی حسابی به ترتیب سه جمله ی متوالی دنباله ی هندسی باشند، قدرنسبت دنباله ی هندسی برابر است با:

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$

در این تست جمله های سوم، هفتم و شانزدهم دنباله ی حسابی، جملات متوالی دنباله ی هندسی هستند؛ پس:

$$q = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

۳.۳. گزینه ۱ باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $x-4$ برابر ۳ است؛ پس:

$$x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow P(4)=3$$

همین طور باقی مانده ی تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ نیز برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P(-2)=1$$

برای پیدا کردن باقی مانده ی $P(x^2) + 4P(-x)$ بر $x-2$ باید مقسوم علیه را برابر صفر قرار دهیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r = P(2^2) + 4P(-2) = P(4) + 4P(-2)$$

$$= 3 + 4(1) = 7$$

۳.۴. گزینه ۴ معادله ی درجه ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو ریشه ی مثبت دارد، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(9m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \\ \Rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12 \end{cases} \quad 1$$

$$\begin{cases} S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases} \quad 2$$

$$\begin{cases} P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \end{cases} \quad 3$$

اشتراک سه مجموعه جواب به دست آمده بازه ی $(-6, -4)$ است.

تابع f^{-1} نیمساز ربع دوم را قطع کرده، پس $x = -\frac{1}{4}$ قابل قبول است.

۴۲. **گزینه ۲** با توجه به قانون $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ داریم $(c \neq 1, c > 0)$:

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{3(\frac{5}{8})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1}} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{1}$$

۴۳. **گزینه ۱** با توجه به نمودار، دو نقطه‌ای $(\frac{1}{4}, 0)$ و $(0, -6)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند.

$$f(\frac{1}{4}) = -9 + (\frac{1}{4})^{a+b} = 0 \Rightarrow 9 = (\frac{1}{4})^{a+b} \xrightarrow{9 = (\frac{1}{3})^{-2}} \frac{1}{4} = (\frac{1}{3})^{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} + b = -2 \quad *$$

$$f(0) = -9 + (\frac{1}{3})^b = -6 \Rightarrow (\frac{1}{3})^b = 3 \Rightarrow b = -1$$

$$\xrightarrow{**} \frac{a}{4} - 1 = -2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{-2x-1}$$

$$\Rightarrow f(2) = -9 + (\frac{1}{3})^{-5} = -9 + 243 = 234$$

۴۴. **گزینه ۳** می‌دانیم اگر نقطه‌ای مانند $(2, x)$ متعلق به f^{-1} باشند، نقطه‌ای $(x, 2)$ متعلق به تابع f است؛ بنابراین:

$$2^x - (\frac{1}{2})^x = A \Rightarrow 2^x = A \Rightarrow A = \frac{1}{A} = 4$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 - 4A - 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

چون حاصل تابع نمایی نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین فقط $2 + \sqrt{5}$ قابل قبول است.

$$2^x = 2 + \sqrt{5} \xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای ۲}} \log_2 2^x = \log_2 (2 + \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow x = \log_2 (2 + \sqrt{5})$$

۴۵. **گزینه ۴** هر یک از مقادیر خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\tan(285^\circ) = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = \tan(-180^\circ + 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(180^\circ \times 6 + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ)$$

$$= -(\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ) = -1 + \sin^2 15^\circ$$

$$= -\cos^2 15^\circ$$

۴۶. **گزینه ۳** با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{3}{4}$ است و نقطه‌ای $(\frac{\pi}{4}, 0)$ در آن صدق می‌کند.

$$|b| + a = \frac{3}{4} \quad 1$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = a + b \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = a + b \cos \frac{\pi}{4} = a + \frac{b}{2} = 0 \quad 2$$

با توجه به شکل در نقطه‌ای $x = 0$ مقدار تابع کوچک‌تر از صفر است، بنابراین

باید b منفی باشد؛ پس معادله‌ی ۱ به صورت $-b + a = \frac{3}{4}$ ساده می‌شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} -b + a = \frac{3}{4} \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین برای برقراری رابطه‌ی * باید علامت عبارت $2x^2 + x - 1$ منفی باشد.

$$2x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{حداکثر طول بازه} = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

۳۹. **گزینه ۳**

یادآوری: $x - [x] < 1 \leq x - [x] + 1$

بنابراین برای تابع f داریم:

$$f(x) = [x] - x = -(x - [x]) \xrightarrow{\text{با توجه به یادآوری}} 0 \geq f(x) > -1$$

با انتخاب $t = f(x)$ داریم: $0 \leq t < 1$ و در نتیجه:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(t)$$

پس کافی است برد تابع $g(t)$ با شرط $0 \leq t < 1$ را به دست آوریم:

$$g(t) = \frac{1-2t}{t+1} = \frac{-2t-2+3}{t+1} = \frac{-2(t+1)+3}{t+1} = -2 + \frac{3}{t+1}$$

حال با توجه به تغییرات t ، ضابطه‌ی تابع g را می‌سازیم:

$$-1 < t \leq 0 \xrightarrow{+1} 0 < t+1 \leq 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} +\infty > \frac{1}{t+1} \geq 1 \xrightarrow{\times 3} +\infty > \frac{3}{t+1} \geq 3 \xrightarrow{-2} +\infty > \frac{3}{t+1} - 2 \geq 1 \Rightarrow g(t) \geq 1$$

$$+\infty > \frac{3}{t+1} \geq 3 \xrightarrow{-2} +\infty > \frac{3}{t+1} - 2 \geq 1 \Rightarrow g(t) \geq 1$$

یعنی برد تابع $g(t)$ و در نتیجه برد تابع $g \circ f(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است.

۴۰. **گزینه ۳** $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است؛ بنابراین:

$$g(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \quad 1$$

$$g(15) = b \Rightarrow f(b) = 15 \quad 2$$

پس نقاطی از تابع f را می‌یابیم که عرض آن‌ها برابر ۳ و ۱۵ باشد:

$$\begin{cases} 1 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 2 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

۴۱. **گزینه ۴** **روش اول:** وارون تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = f(x) = x - \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} (x = y - \frac{1}{2y}) \xrightarrow{\times 2y} 2xy = 2y^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 2}}{2}$$

$$2y^2 - 2xy - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 2}}{2}$$

با برابر قرار دادن این تابع با نیمساز ناحیه‌ی دوم داریم (در ناحیه‌ی دوم y مثبت است):

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{2} = -x \Rightarrow -3x = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} 9x^2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

و چون در ناحیه‌ی دوم قرار دارد $x = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

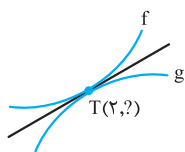
روش دوم: اگر تابع f^{-1} نیمساز ربع دوم را قطع نماید، یعنی نقطه‌ای مثل $(x, -x)$ در آن صدق می‌کند. بنابراین در تابع f نقطه‌ی $(x, -x)$ صدق می‌کند؛ پس:

$$x - \frac{1}{2x} = -x \Rightarrow 2x - \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = -\frac{6}{17}$$

۵۱. (گزینه ۴) شکل فرضی زیر را در نظر بگیرید:



می‌دانیم شیب خط مماس در یک نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است؛ بنابراین مشتق دو تابع در $x = 2$ برابر هستند.

$$f'(x) = \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3$$

$$g'(x) = 2ax + b \Rightarrow g'(2) = 4a + b = -3 \quad (1)$$

همچنین مقدار دو تابع در $x = 2$ برابر است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ g(2) = 4a + 2b \end{cases} \Rightarrow 4a + 2b = 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{حل دستگاه}]{(1) \text{ و } (2)} b = 7, a = -\frac{1}{4}$$

۵۲. (گزینه ۴) مشتق تابع $y = au^n$ برابر است با: $y' = an \cdot u \cdot u^{n-1}$ ؛ بنابراین:

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{(2-2x)(3x+5) - 2(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\right) \cdot \left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{2}{3} \cdot (18) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 6$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \quad (53. \text{گزینه ۱})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2x^2 + 2 - 2x^3 - 4x^2 + 6x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^3 + 4x + 2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -2(x^3 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$2-\sqrt{5}$	1	$2+\sqrt{5}$
f'	-	+	-
f		min	max

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - 4}{x^2 + 1} \Rightarrow f(\sqrt{5} + 2) = \frac{(\sqrt{5} + 3)^2 - 4}{(\sqrt{5} + 2)^2 + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}$$

۴۷. (گزینه ۱) نمودار، یک تناوب تابع را نشان می‌دهد؛ بنابراین:

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

از طرفی با توجه به ضابطه‌ی تابع $y = a \sin(bx) + c$ دوره‌ی تناوب برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{6})$ صعودی است پس a و b هم‌علامت هستند.

همچنین ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب ۱ و -۳ هستند؛ بنابراین:

$$y = a \sin(bx) + c \Rightarrow \begin{cases} \max = c + |a| \\ \min = c - |a| \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \begin{cases} c + |a| = 1 \\ c - |a| = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ |a| = 2 \end{cases}$$

a و b هم‌علامت هستند؛ بنابراین:

$$\begin{cases} a = 2 \text{ و } b = 3 \\ a = -2 \text{ و } b = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} \begin{cases} c = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

۴۸. (گزینه ۳) با توجه به رابطه‌ی $\sin a \cos a = \sin 2a$ داریم:

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \Rightarrow 2 \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}} \sin 6x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموعه جواب‌ها در بازه‌ی } [0, \frac{\pi}{3}] } \left\{ \frac{\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{12} \right\}$$

۴۹. (گزینه ۴) شرط پیوستگی در یک نقطه مانند $x = \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

حد تابع را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \frac{-1}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(2 \sin x + 1)}{1 + \sin x} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = -\frac{3}{2} = -1.5$$

۵۰. (گزینه ۲) حد تابع در $+\infty$ برابر ۲ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^n}{ax^3} = 2 \quad n=3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

(دقت کنید اگر $n \leq 2$ باشد، حاصل برابر ۲ نمی‌شود.)

$$\Rightarrow CV = \frac{1/60.2}{8} \approx 0.02$$

۵۸. (گزینه ۲) ضلع افقی این مثلث $y=0$ است. نقاط تلاقی این خط با دو خط دیگر، دو رأس مثلث را مشخص می‌کند.

$$\begin{cases} y+2x=16 \\ 2y-x=2 \end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases} 0+2x=16 \Rightarrow x=8 \Rightarrow B(8,0) \\ 2(0)-x=2 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow C(-2,0) \end{cases}$$

نقطه‌ی وسط این ضلع برابر است با:

$$M = \frac{8-2}{2} = 3 \Rightarrow M(3,0)$$

رأس سوم مثلث از برخورد دو خط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y+2x=16 \\ 2y-x=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} A(6,4)$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A از M همان میانه‌ی ضلع افقی مثلث است:

$$AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۵۹. (گزینه ۳) در دوزنقه‌ی ABCD اگر نسبت $\frac{MA}{MD} = \frac{m}{n}$ باشد، طول MN از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$MN = \frac{nAB + mCD}{n+m}$$

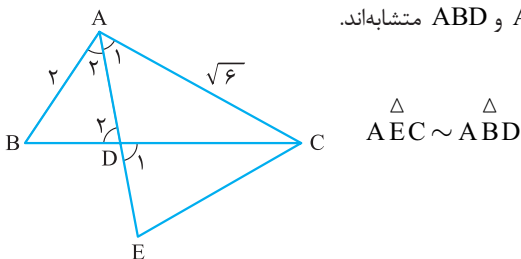
بنابراین:

$$MN = \frac{3 \times 7 + 2 \times 12}{3+2} = \frac{21+24}{5} = 9$$

۶۰. (گزینه ۲) مثلث DCE متساوی‌الساقین است، پس: $\hat{E} = \hat{D}_1$

از طرفی به دلیل متقابل به رأس بودن دو زاویه‌ی D_1 و D_2 ، این دو زاویه با هم برابرند؛ بنابراین: $\hat{D}_2 = \hat{E}$

زاویه‌های A_1 و A_2 نیز به دلیل نیمساز بودن پاره خط AD برابرند. در نتیجه دو مثلث AEC و ABD متشابه‌اند.



$$\text{نسبت تشابه دو مثلث } k = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ است.}$$

بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر است با:

$$k^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \div 2 \rightarrow \frac{5+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} &= \frac{(5+3\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} \\ &= \frac{25-10\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30}{25-20} = \frac{5\sqrt{5}-5}{5} = \sqrt{5}-1 \end{aligned}$$

۵۴. (گزینه ۱) اگر نقطه‌ی فرضی $B(x, \sqrt{2x+7})$ روی منحنی کمترین فاصله را تا نقطه‌ی $A(5,0)$ داشته باشد، فاصله‌ی A تا B برابر است با:

$$k = |AB| = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

با مشتق‌گیری از این عبارت داریم:

$$k' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \Rightarrow x=4$$

با رسم جدول تغییرات مشخص می‌شود $x=4$ طول مینیمم نسبی تابع است؛ بنابراین:

$$\min(k) = \sqrt{(4)^2 - 8(4) + 32} = 4$$

۵۵. (گزینه ۴) تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

اگر یک نفر سه کتاب و دو نفر دیگر هر کدام یک کتاب دریافت کنند:

$$\begin{aligned} &\text{سه کتاب} \uparrow \\ &\left(\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) \times 2! = 3 \times 10 \times 2 = 60 \\ &\downarrow \text{دو نفر دیگر} \\ &\text{انتخاب یک نفر با سه کتاب} \end{aligned}$$

اگر دو نفر دو کتاب و یک نفر دیگر یک کتاب دریافت کنند:

$$\begin{aligned} &\text{دو کتاب} \uparrow \\ &\left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \times 3 = 3 \times 10 \times 3 = 90 \\ &\downarrow \text{نفر دیگر} \\ &\text{انتخاب دو نفر با دو کتاب} \end{aligned}$$

بنابراین مجموع حالات برابر است با:

۵۶. (گزینه ۳) متمم این که دو فرد متمایز کنار هم نباشند این است که این دو نفر کنار یکدیگر باشند؛ بنابراین:

تعداد کل حالات برابر است با:

تعداد حالاتی که دو فرد a و b کنار هم باشند:

$$n(S) = 10! \\ \Rightarrow n(A') = 9! \times 2! \\ \text{فرد a و b} \quad \text{۸ نفر باقی مانده}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{9! \times 2!}{10!} = 1 - \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$$

۵۷. (گزینه ۲) ابتدا میانگین داده‌های آماری را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{10+10+8+8+8+7+5}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

می‌دانیم $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{2(10-8)^2 + 3(8-8)^2 + (7-8)^2 + (5-8)^2}{7} \\ &= \frac{2 \times 4 + 0 + 1 + 9}{7} = \frac{14}{7} \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{14}{7} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2} \approx 1.414 \approx 1/0.707$$